

Series de Fourier y Problemas de Contorno

Segunda Edición

Churchill



SERIES DE
FOURIER
Y
PROBLEMAS
DE
CONTORNO

RUEL V. CHURCHILL

PROFESOR DE MATEMÁTICAS
UNIVERSITY OF MICHIGAN

Traducción: LUIS JEVENOIS P. DE
ARRILUCEA, *Licenciado en Ciencias
Exactas, Ingeniero de Armamento.*
Revisión: MANUEL ARJONA BRIEVA,
Ingeniero de Armamento.

McGRAW-HILL BOOK COMPANY

NEW YORK TORONTO LONDON SYDNEY

SERIES DE FOURIER Y PROBLEMAS DE CONTORNO

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS

Copyright © 1966 por EDICIONES DEL CASTILLO, S. A., Madrid, España
Copyright © 1977, respecto a la edición en español por
LIBROS MCGRAW-HILL DE MEXICO, S. A. de C. V.

Atlacomulco 499-501, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Ind. Editorial, Reg. núm. 465

0-07-010842

Traducido de la segunda edición en inglés de
FOURIER SERIES AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS
Copyright © 1941, 1963, by MCGRAW-HILL BOOK, Co., INC., U.S.A.

2345678901

EC-66

7123456987

Impreso en México

Printed in Mexico

Esta obra se terminó en noviembre de 1977
en Creatividad Gráfica, S. A.,
5 de Febrero 839, México, D. F.

Se tiraron 1 100 ejemplares

PROLOGO

Este texto proporciona una introducción a las series de Fourier y sus aplicaciones a problemas de contorno en ecuaciones entre derivadas parciales de la ingeniería y la física. Y ha sido proyectado para estudiantes que hayan hecho algún curso de cálculo avanzado. Las aplicaciones físicas, explicadas con algún detalle, se han mantenido a un nivel bastante elemental.

El primer objetivo perseguido es el de introducir el concepto de sistemas ortogonales de funciones, y el de representaciones de funciones arbitrarias por medio de series de funciones, de tales sistemas, concediéndose especial atención a los casos más sobresalientes, como la representación de funciones por medio de series de Fourier trigonométricas. También se trata de las representaciones integrales de Fourier y de los desarrollos en series de Bessel y polinomios de Legendre.

El segundo objetivo es dar una clara presentación del método clásico de resolución de problemas de contorno, con ayuda de las mencionadas representaciones por medio de series de funciones ortogonales. Se ha prestado alguna atención a la comprobación de las soluciones y a la unicidad de éstas porque el método no puede presentarse de modo adecuado si faltan esas consideraciones. Se tratan otros métodos en los libros del autor *Matemáticas Operativas y Variables complejas y sus aplicaciones*.

Esta edición es una revisión extensa de la edición original del libro de 1941. La exposición ha sido revisada en su totalidad. Se han introducido materias adicionales relativas a ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno, convergencia uniforme, funciones complejas, integrales de Fourier, convergencia de las series de Legendre, unicidad de soluciones y otros temas. Se ha juzgado conveniente algún cambio en el orden de presentación; por ejemplo, las ecuaciones en derivadas parciales de la física, son ahora estudiadas en el capítulo primero con objeto de simplificar la introducción a otros temas.

Se ha concedido atención adicional al análisis matemático. Se han revisado los ejemplos, problemas, figuras y bibliografía.

Los Caps. 8 y 9 sobre funciones de Bessel y polinomios de Legendre, son independientes entre sí y pueden ser estudiados en el orden que se desee. El Cap. 10, que trata de la unicidad de soluciones, y el Cap. 5, sobre propiedades adicionales de las series de Fourier, así como algunas secciones de otros capítulos, pueden omitirse si se desea abreviar el curso.

En el trabajo de preparación de esta edición, el autor reconoce y agradece la ayuda y alientos recibidos de muchos profesores y estudiantes. Merecen gracias especiales entre sus colegas locales, los profesores R. C. F. Bartels, C. L. Dolph, G. E. Hay y E. D. Rainville.

RUEL V. CHURCHILL

TABLA DE MATERIAS

Prólogo	5
1. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE LA FISICA	9
Dos problemas relacionados. Problemas de contorno lineales. La cuerda vibrante. Modificaciones de la ecuación. Condiciones en los extremos. Otros ejemplos de ecuaciones de las ondas. Conducción del calor. Discusión de la ecuación del calor. Ecuación de Laplace. Coordenadas cilíndricas y esféricas. Tipos de ecuaciones y condiciones.	
2. SUPERPOSICION DE SOLUCIONES	31
Combinaciones lineales. Ejemplos. Series de soluciones. Convergencia uniforme. Ejemplo. Integrales de las soluciones. Separación de variables. La serie de Fourier de senos. Cuerda pulsada. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Las soluciones generales de las ecuaciones en derivadas parciales. Superposición. Otros métodos. Desarrollo histórico.	
3. SUCESIONES ORTOGONALES DE FUNCIONES.	57
El producto interior de dos vectores. Sistemas ortogonales de vectores. Funciones como vectores. Ortogonalidad. Funciones casi-continuas. Series de Fourier generalizadas. Aproximación cuadrática. Sistemas cerrados y completos. Funciones con valores complejos. Otros tipos de ortogonalidad. Problemas de Sturm-Liouville. Ortogonalidad de las autofunciones. Unicidad de las autofunciones.	
4. SERIES DE FOURIER.	85
La serie básica. Ejemplo. Serie de Fourier de cosenos. Serie de senos. Derivadas unidireccionales. Una fórmula de integración. Teoría preliminar. Un teorema de Fourier. Discusión del teorema. Otras formas de las series de Fourier. Las funciones trigonométricas ortonormales.	
5. OTRAS PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER	102
Convergencia uniforme. Observaciones. Derivación de las series de Fourier. Integración de las series de Fourier. Condiciones más generales.	

6. INTEGRALES DE FOURIER	121
La fórmula integral de Fourier. Un teorema sobre la integral de Fourier. Formas seno o coseno. La forma exponencial. Transformaciones de Fourier.	
7. PROBLEMAS DE CONTORNO	134
Soluciones formales y rigurosas. La cuerda vibrante, desplazada inicialmente. Discusión de la solución. Velocidad inicial dada. Ecuaciones diferenciales no-homogéneas. Barra elástica. Temperaturas de una barra. Otras condiciones de contorno. Un problema de Dirichlet. Series de Fourier con dos variables. Una aplicación de las integrales de Fourier. Temperaturas $u(x,t)$ en un medio ilimitado. Observaciones y más ejemplos.	
8. FUNCIONES DE BESSEL Y SUS APLICACIONES	172
Ecuación de Bessel. Funciones J_n de Bessel. Algunas otras funciones de Bessel. Fórmulas de derivación y recurrencia. Formas integrales de J_n . Consecuencias de la forma integral de Bessel. Los ceros de $J_0[x]$. Ceros de otras funciones. Sistemas ortogonales de funciones de Bessel. Las funciones ortonormales. Series de Fourier-Bessel. Temperaturas en un cilindro largo. Transmisión del calor en la superficie del cilindro. Vibración de una membrana circular.	
9. POLINOMIOS DE LEGENDRE Y SUS APLICACIONES	206
Deducción de los polinomios de Legendre. Ortogonalidad. Fórmula de Rodrigues. Normas. Formas integrales. Más propiedades de orden. Serie de Legendre. Convergencia de las series. Problemas de Dirichlet en regiones esféricas. Temperaturas estacionarias en un hemisferio. Otros sistemas ortogonales.	
10. UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES	234
Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. Criterio de Abel para la convergencia uniforme. Unicidad de las soluciones de la ecuación del calor. Ejemplo. Soluciones de la ecuación de Laplace o de la de Poisson. Una aplicación. Soluciones de una ecuación de las ondas.	
BIBLIOGRAFIA	251
Indice	253

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE LA FISICA

1. Dos problemas relacionados. Nos ocuparemos aquí de dos tipos generales de problemas. Un tipo trata de la representación de funciones dadas arbitrariamente por medio de series infinitas de funciones pertenecientes a un cierto conjunto. El otro consiste en problemas de contorno en las ecuaciones entre derivadas parciales, en especial ecuaciones importantes de la física y la ingeniería.

Se encuentran representaciones por medio de series en métodos de resolución de problemas de contorno. Las teorías en las que se basan esas representaciones pueden ser presentadas independientemente. Tienen aspectos atractivos tales como la extensión de conceptos de la geometría, del análisis vectorial y del álgebra al campo del análisis matemático. Su precisión matemática es también agradable. Pero ganan en unidad e interés cuando se presentan en relación con los problemas de contorno.

El conjunto de funciones que forman los términos de la representación por medio de series, está determinado por el problema de contorno. Las representaciones o desarrollos en series de Fourier y ciertos tipos de series de funciones seno y coseno, están asociados con los problemas de contorno más comunes. Pero en el texto consideraremos también extensiones y generalizaciones de tales series, incluyendo las integrales de Fourier, las series de funciones de Bessel y los polinomios de Legendre.

Un problema de contorno está correctamente planteado si tiene una solución y ésta es única. Los problemas de la física asociados con ecuaciones en derivadas parciales sugieren frecuentemente condiciones de contorno bajo las cuales puede plantearse correctamente el problema. De hecho, es a veces conveniente interpretar físicamente un problema con objeto de juzgar si las condiciones de contorno pueden ser adecuadas. Esta es una razón muy importante para asociar tales problemas con sus aplicaciones físicas, aparte de la opor-

tunidad de poner a la vista interesantes contactos entre el análisis matemático y las ciencias físicas.

La teoría de ecuaciones en derivadas parciales proporciona resultados sobre la existencia de soluciones en los problemas de contorno. Pero tales resultados son necesariamente limitados y complicados por la gran variedad de características: tipos de ecuaciones y de condiciones, y tipos de dominios. Al tratar de un problema específico, en lugar de acudir a la teoría general, quizá podamos encontrar una solución y demostrar después que tal solución es la única posible.

2. Problemas de contorno lineales. La teoría y aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias y entre derivadas parciales relativas a una función u exige corrientemente que u satisfaga no solamente la ecuación diferencial en la totalidad de algún dominio de la variable o variables independientes, sino también algunas condiciones en los contornos de aquel dominio. Las ecuaciones que representan tales condiciones de contorno pueden contener valores de las derivadas de u , así como de la propia u , en puntos del contorno. Además se exigen ciertas condiciones relativas a la continuidad de u y de sus derivadas dentro del dominio y en el contorno de éste.

La unión de todas estas condiciones o exigencias constituye un *problema de contorno* relativo a la función u . Aplicaremos esta denominación siempre que la ecuación diferencial vaya acompañada por algunas condiciones de contorno, aun en el caso de que las condiciones puedan no ser adecuadas para asegurar una solución única del problema.

Las tres ecuaciones

$$(1) \quad \begin{aligned} u''(x) - u(x) &= -1 & (0 < x < 1), \\ u'(0) &= 0, & u(1) = 0, \end{aligned}$$

por ejemplo, constituyen un problema de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias. El dominio de la variable independiente x es el intervalo $0 < x < 1$, cuyos límites o contorno consisten en los dos puntos $x = 0$ y $x = 1$. La solución de este problema que, en unión con sus derivadas, es continua para cualquier valor de x , es

$$(2) \quad u(x) = 1 - (\cos 1)^{-1} \cos x.$$

Con frecuencia es conveniente indicar las operaciones de derivación parcial poniendo como subíndice a las variables independientes. Si, por ejemplo, u es una función de las variables independientes x e y , podemos escribir

$$u_x \text{ ó } u_x(x,y) \text{ en vez de } \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} \text{ en vez de } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} \text{ en vez de } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

y así sucesivamente. Igualmente emplearemos cuando convenga la notación $u_x(x_0, y)$ y $u_{xx}(x_0, y)$ para designar los valores de las funciones $\partial u/\partial x$ y $\partial^2 u/\partial x^2$, respectivamente, sobre la recta $x = x_0$ y los símbolos correspondientes para valores de contorno de otras derivadas.

El problema consistente en la ecuación en derivadas parciales

$$(3) \quad u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad (x > 0, y > 0)$$

y las dos condiciones de contorno

$$(4) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= u_x(0, y) & (y > 0), \\ u(x, 0) &= \text{sen } x + \text{cos } x & (x > 0), \end{aligned}$$

es un ejemplo de problema de contorno en ecuaciones en derivadas parciales. El dominio es el primer cuadrante del plano xy . El lector puede comprobar que la función

$$(5) \quad u(x, y) = e^{-y}(\text{sen } x + \text{cos } x)$$

es una solución del problema. Esta función y sus derivadas parciales son continuas en todo el plano respecto al par de variables x, y además están acotadas en el dominio $x > 0, y > 0$.

Una ecuación diferencial o una condición de contorno relativos a una función u es *lineal* si es una ecuación de *primer grado en u y en las derivadas de u* . Por consiguiente, los términos de la ecuación son, o bien funciones de las variables independientes solamente, incluyendo constantes, o tales funciones multiplicadas sea por u o una de las derivadas de u .

Las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno (1), (3) y (4) anteriores, son todas lineales. La ecuación diferencial

$$(6) \quad zu_{xx} + xy^2u_{yy} - e^xu_z = f(y, z)$$

en $u(x, y, z)$ es lineal. Pero la ecuación

$$u_{xx} + uu_y = x$$

no lo es en $u(x, y)$ porque el término uu_y no es de primer grado considerado como expresión algebraica de las dos variables u y u_y .

Designemos con las letras A, B, \dots, G constantes o funciones de las variables independientes x e y solamente. Entonces la *ecuación*

ción lineal en derivadas parciales de segundo orden en $u(x,y)$ tiene la forma

$$(7) \quad Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G.$$

Un problema de contorno es *lineal*, si su ecuación diferencial y todas sus condiciones de contorno son lineales. El Prob. (1) y el problema consistente en las Ecs. (3) y (4) son ejemplos de problemas de contorno lineales.

Los métodos de solución que se presentan en este libro no son aplicables a problemas de contorno no-lineales.

Una ecuación diferencial o una condición de contorno lineales son *homogéneas* si todos sus términos, aparte del término cero, son de primer grado en la función u y sus derivadas.

La Ec. (7) es homogénea en un dominio, solamente en el caso de que sea $G(x,y) = 0$ en todo el dominio. La Ec. (6) es no-homogénea si $f(x,y) \neq 0$. La Ec. (3) y la primera de las condiciones (4) son homogéneas. En nuestro estudio de los problemas de contorno, las ecuaciones homogéneas tendrán un papel importante.

3. La cuerda vibrante. Una cuerda tensamente estirada cuya posición de equilibrio es algún intervalo del eje de las x está vibrando en el plano xy . Cada punto de la cuerda, de coordenadas $(x,0)$ en la posición de equilibrio, tiene un desplazamiento transversal $y(x,t)$ en el momento t . Suponemos que los desplazamientos y son pequeños con relación a la longitud de la cuerda, que las inclinaciones son pequeñas y que otras condiciones son tales que el movimiento de cada punto es esencialmente en la dirección del eje de la y . Entonces en el momento t , el punto tiene las coordenadas (x,y) .

Supongamos que la tensión P de la cuerda es lo suficientemente grande para que ésta se comporte como si fuera perfectamente flexible; esto es, en cualquier punto, la parte de la cuerda a la izquierda de ese punto ejerce la fuerza de magnitud P en dirección tangencial sobre la parte a la derecha; el efecto del momento de flexión en este punto puede despreciarse.

La magnitud de la componente x de la fuerza tensora se designa por H (Fig. 1). Suponemos finalmente que H es constante, esto es, que la variación de H con x y t puede despreciarse.

Estas condiciones ideales son severas, pero están justificadas en muchas aplicaciones. Son adecuadamente satisfechas, por ejemplo, por las cuerdas de los instrumentos musicales cuando éstos se tocan en la forma usual. Matemáticamente, las suposiciones hechas conducen a una ecuación en derivadas parciales en $y(x,t)$, que es lineal.

Designemos ahora por $V(x,t)$ al componente y de la fuerza tensora ejercida por la porción izquierda de la cuerda sobre la de la derecha

en el punto (x, y) . Tomaremos como sentido positivo de V el del eje de las y . Si α es el ángulo que forma la tangente a la cuerda en el punto (x, y) con el eje de las x , en el momento t , entonces $-V/H = \operatorname{tg} \alpha = \partial y / \partial x$ como se indica en la Fig. 1. Así pues, V , componente y de la fuerza ejercida por la parte de la cuerda a la izquierda de un punto (x, y) sobre la parte de la derecha, en el momento t , está dada por la fórmula

$$(1) \quad V(x, t) = -Hy_x(x, t) \quad (H > 0).$$

Esta es la fórmula base para obtener la ecuación del movimiento de la cuerda. Se utiliza también para establecer ciertos tipos de condiciones de contorno.

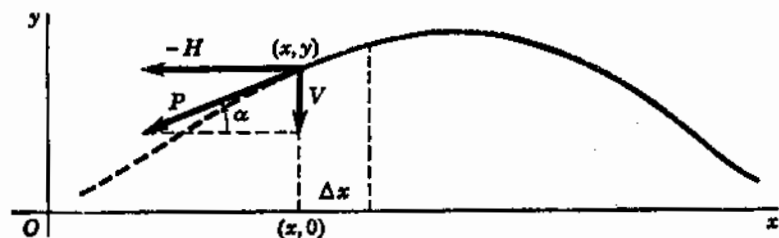


FIG. 1

Supongamos que todas las fuerzas exteriores tales como el peso de la cuerda y las fuerzas de resistencia, que actúan sobre la cuerda aparte de las fuerzas en los puntos extremos, pueden ser despreciadas. Consideremos un segmento de la cuerda que no contiene ningún extremo, y cuya proyección sobre el eje de las x tiene una longitud Δx . Puesto que los componentes x de los desplazamientos son despreciables, la masa del segmento es $\delta \Delta x$, donde la constante δ es la masa de la cuerda por unidad de longitud. En el momento t , la componente y de la fuerza ejercida por la cuerda sobre el segmento en el extremo izquierdo de éste (x, y) , es $V(x, t)$, dada por la fórmula (1). El componente y de la fuerza ejercida por la cuerda sobre el otro extremo del segmento es $-V(x + \Delta x, t)$, donde el signo negativo significa que la fuerza es ejercida por la parte de la cuerda que está a la derecha de aquel punto sobre la que está a la izquierda del mismo. La aceleración en el extremo (x, y) en la dirección de las y es $y_{tt}(x, t)$. De acuerdo con la segunda de las leyes del movimiento de Newton (masa por aceleración igual a fuerza) se tiene:

$$(2) \quad \delta \Delta x y_{tt}(x, t) = -Hy_x(x, t) + Hy_x(x + \Delta x, t),$$

aproximadamente, cuando Δx es pequeño. De aquí:

$$y_{tt}(x,t) = \frac{H}{\delta} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_x(x + \Delta x, t) - y_x(x, t)}{\Delta x} = \frac{H}{\delta} y_{xx}(x,t)$$

en todo punto donde existan las derivadas parciales.

Por tanto, la función $y(x,t)$ que representa los desplazamientos transversales en una cuerda tensa bajo las condiciones indicadas anteriormente, satisface la *ecuación de las ondas*

$$(3) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \left(a^2 = \frac{H}{\delta} > 0 \right)$$

en los puntos donde no actúen sobre la cuerda fuerzas exteriores. La constante a tiene las dimensiones físicas de una velocidad.

4. Modificaciones de la ecuación. Condiciones en los extremos. Si a lo largo de la cuerda actúan fuerzas exteriores paralelas al eje de las y , designemos por F la fuerza por unidad de longitud de la cuerda. Será preciso entonces añadir al segundo miembro de la Ec. (2), Sec. 3, un término $F \Delta x$ y la ecuación del movimiento será

$$(1) \quad y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t) + F \delta^{-1}.$$

En particular, si el eje de las y es vertical con su sentido positivo hacia arriba y las fuerzas exteriores consisten en el peso de la cuerda, entonces $F \Delta x = -\delta \Delta x g$, donde la constante g es la aceleración de la gravedad. La Ec. (1) se convierte en la ecuación lineal no-homogénea

$$(2) \quad y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t) - g.$$

En la Ec. (1), F puede ser una función de x , t , y o de las derivadas de y . En el caso de que la fuerza exterior por unidad de longitud sea una fuerza amortiguadora proporcional a la velocidad en la dirección de las y , por ejemplo, F se reemplaza por $-By_t$, donde la constante positiva B es un coeficiente de amortiguamiento. En este caso la ecuación del movimiento es lineal homogénea:

$$(3) \quad y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t) - by_t(x,t) \quad (b = B\delta^{-1}).$$

Si un extremo $x = 0$ de la cuerda, se conserva fijo en el origen para todo instante $t \geq 0$, la condición de contorno de aquel extremo es evidentemente

$$(4) \quad y(0,t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

Pero si se permite a dicho extremo resbalar a lo largo del eje de las y y se le mueve de manera que su desplazamiento sobre el mismo sea $f(t)$, la condición de contorno es la ecuación lineal no-homogénea

$$(5) \quad y(0,t) = f(t) \quad (t \geq 0).$$

Si el extremo izquierdo forma un lazo alrededor del eje de las y , y se le aplica una fuerza $g(t)$ en la dirección y en aquel extremo, $g(t)$ es el límite de la fuerza $V(x,t)$, descrita en Sec. 3 cuando x tiende a cero por el lado de las abscisas positivas. La condición de contorno es entonces

$$(6) \quad -Hy_x(0,t) = g(t) \quad (t > 0).$$

Si $x = 0$ es el extremo derecho, el signo negativo desaparece porque entonces $g(t)$ es la fuerza ejercida sobre la parte de la cuerda que está a la izquierda de ese extremo.

5. Otros ejemplos de ecuaciones de las ondas. Podemos presentar más ejemplos de funciones en física e ingeniería que satisfacen ecuaciones de las ondas sin tener que salirnos de fenómenos físicos sencillos.

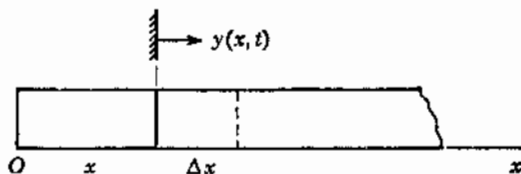


FIG. 2

Vibraciones longitudinales de las barras. Tomemos como abscisas las distancias de un extremo de una barra elástica de forma cilíndrica o prismática a otras secciones transversales cuando la barra no está sometida a tensiones. Desplazamientos de los extremos o desplazamientos iniciales o velocidades de la barra todos dirigidos longitudinalmente a lo largo de la barra y uniformes sobre cualquier sección transversal obligan a las secciones de la barra a moverse en la dirección del eje de las x . Designaremos el desplazamiento longitudinal de la sección de la barra de abscisa primitivo x en el instante t por $y(x,t)$. El origen del desplazamiento y de esa sección queda así fijado fuera de la barra, en el plano de la posición original de referencia de dicha sección (Fig. 2).

En el mismo momento una sección vecina de abscisa primitiva $x + \Delta x$, a la derecha de la sección x , tiene un desplazamiento $y(x +$

+ $\Delta x, t$); por tanto, el elemento de barra de longitud natural Δx resulta estirado (o comprimido) en una longitud $y(x + \Delta x, t) - y(x, t)$. Suponiendo que esta extensión o compresión del elemento satisface la ley de Hooke, la fuerza ejercida en el elemento sobre su extremo izquierdo es, excepto cuando no se tiene en cuenta el efecto de la inercia sobre el elemento que se mueve

$$-AE \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x},$$

donde A es el área de la sección transversal y E el módulo de elasticidad del material para tensión y compresión. Cuando Δx tiende a 0, resulta que la fuerza longitudinal total $p(x, t)$ ejercida sobre la sección x por la parte de la barra a la izquierda de esa sección está dada por la fórmula básica

$$(1) \quad p(x, t) = -AEy_x(x, t).$$

Sea δ la masa del material por unidad de volumen. Si aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento de un elemento de la barra de longitud Δx ,

$$(2) \quad \delta A \Delta x y_{tt}(x, t) = -AEy_x(x, t) + AEy_x(x + \Delta x, t),$$

donde el último término representa la fuerza sobre el elemento en el extremo $x + \Delta x$. Después de dividir por $\delta A \Delta x$ y haciendo que Δx tienda a cero, se obtiene

$$(3) \quad y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) \quad (a^2 = E\delta^{-1}).$$

Por tanto, los desplazamientos longitudinales $y(x, t)$ en una barra elástica satisfacen la ecuación de las ondas (3) cuando sobre la barra no actúan otras fuerzas exteriores longitudinales que las de los extremos. Hemos supuesto solamente que los desplazamientos son lo suficientemente pequeños como para que se cumpla la ley de Hooke y que las secciones permanecen planas después de haber sido desplazadas. La barra elástica anterior puede remplazarse por una columna de aire; entonces la Ec. (3) tiene aplicaciones a la teoría del sonido.

La condición de contorno $y(0, t) = 0$ significa que el extremo $x = 0$ de la barra se mantiene en posición fija. Si el extremo $x = 0$ está libre cuando $t > 0$, entonces ninguna fuerza actúa sobre dicho extremo; esto es, $p(0, t) = 0$ ó según la Ec. (1)

$$(4) \quad y_x(0, t) = 0 \quad (t > 0).$$

Vibraciones transversales de las membranas. Sea $z(x,y,t)$ un desplazamiento pequeño en la dirección z , en el momento t , de los puntos $(x,y,0)$ de una membrana flexible estirada tensamente en un bastidor en el plano xy . El esfuerzo tensor P , tensión por unidad de longitud a través de cualquier recta de la membrana, es grande, y la magnitud H de su componente paralela al plano xy se supone constante. Entonces, la fuerza interior en la dirección z en una sección $x = x_0$, por unidad de longitud de esta recta, es $-Hz_x(x_0,y,t)$ que corresponde a la fuerza V (Sec. 3) en la cuerda vibrante. La fuerza en la dirección z en una sección $y = y_0$ por unidad de longitud es $-Hz_y(x,y_0,t)$.

Consideremos un elemento de la membrana cuya proyección sobre el plano xy sea un rectángulo con vértices opuestos $(x,y,0)$ y $(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$. Si se aplica la segunda ley de Newton al movimiento de este elemento en la dirección z , se encuentra que $z(x,y,t)$ satisface la ecuación de las ondas bidimensional.

$$(5) \quad z_{tt} = a^2(z_{xx} + z_{yy}) \quad (a^2 = H\delta^{-1}).$$

Aquí δ es la masa de la membrana por unidad de área. Los detalles de la deducción de la fórmula (5) se dejan para los problemas.

Si sobre la membrana actúa una fuerza exterior transversal $F(x,y,t)$, por unidad de área la ecuación del movimiento toma la forma

$$(6) \quad z_{tt} = a^2(z_{xx} + z_{yy}) + F\delta^{-1}.$$

PROBLEMAS

1. Dar los detalles de la deducción de la Ec. (1), Sec. 4, para las vibraciones forzadas de una cuerda vibrante.

2. Una cuerda tensamente estirada con sus extremos fijos en los puntos $(0,0)$ y $(2c,0)$ pende en reposo bajo su propio peso. El eje y está dirigido verticalmente hacia arriba. Explicar porqué los desplazamientos estáticos $y(x)$ de los puntos de la cuerda satisfacen el problema de contorno.

$$\begin{aligned} a^2 y''(x) - g &= 0 & (0 < x < 2c), \\ y(0) = y(2c) &= 0. \end{aligned}$$

Partiendo de estas expresiones, demostrar que la cuerda pende formando el arco parabólico

$$(x - c)^2 = \frac{2a^2}{g} \left(y + \frac{gc^2}{2a^2} \right) \quad (0 \leq x \leq 2c).$$

Demostrar que la flecha del arco varía directamente con δ y c^2 inversamente con H .

3. Utilizar la fórmula (1), Sec. 3, que da la fuerza vertical V y la fórmula para y del Prob. 2 para demostrar que la fuerza vertical ejercida sobre la

cuerda por cualquiera de los extremos es $g\delta c$, o sea la mitad del peso de la cuerda.

4. Un trozo de alambre de 1 pie de longitud estirado entre el origen y el punto $(1,0)$ con una tensión $H = 10$ libras, pesa 0,032 lb ($g\delta = 0,032$, $g = 32$ pies/segundo²). En el instante $t = 0$ el alambre está situado a lo largo del eje de las x , pero tiene una velocidad de 1 pie/segundo en la dirección del eje y , posiblemente porque sus soportes se encontraban en movimiento y en aquel momento quedaron en reposo. Si a lo largo del alambre no actúan fuerzas exteriores, demostrar por qué los desplazamientos $y(x,t)$ deben satisfacer este problema de contorno.

$$y_{tt}(x,t) = 10^4 y_{xx}(x,t) \quad (0 < x < 1, t > 0),$$

$$y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad y_t(x,0) = 0, \quad y_t(0,0) = 1.$$

5. Las dimensiones físicas de la fuerza H , tensión de la cuerda, son las de una masa por una aceleración, MLT^{-2} , donde M indica masa, L longitud, y T tiempo. Siendo $a^2 = H\delta^{-1}$, demostrar que a tiene las dimensiones de una velocidad LT^{-1} .

→ 6. El extremo $x = 0$ de una barra cilíndrica elástica se conserva fijo, y una fuerza de compresión constante de magnitud F_0 unidades por unidad de área se ejerce en todo momento $t > 0$ sobre el extremo $x = c$. Si la barra inicialmente no sufre esfuerzos y está en reposo, y si no actúan fuerzas exteriores a lo largo de la misma, verificar que la función $y(x,t)$ que representa los desplazamientos longitudinales de las secciones transversales debe satisfacer este problema de contorno

$$y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t) \quad (0 < x < c, t > 0; a^2 = E\delta^{-1})$$

$$y(0,t) = 0, \quad E y_x(c,t) = -F_0, \quad y(x,0) = y_t(x,0) = 0.$$

7. El extremo izquierdo $x = 0$ de una barra elástica está sujeto elásticamente de tal modo que la fuerza longitudinal por unidad de área ejercida sobre la barra en aquel extremo es proporcional al desplazamiento del mismo, pero de signo opuesto. Demostrar que la condición en el límite tiene para aquel extremo la forma

$$E y_x(0,t) = K y(0,t) \quad (K > 0).$$

8. Deducir la Ec. (6), Sec. 5. Verificar además, que los desplazamientos transversales estáticos $z(x,y)$ de una membrana, sobre la que actúa una fuerza transversal $F(x,y)$ por unidad de área, satisface la ecuación de Poisson

$$z_{xx} + z_{yy} + k = 0 \quad (k = FH^{-1}).$$

6. **Conducción del calor.** La energía térmica se transmite en los cuerpos sólidos por conducción de las regiones más calientes a las más frías. Es conveniente referirse a esta transmisión llamándola flujo calorífico, como si el calor fuera un fluido o gas que se difundiera a través del cuerpo desde las regiones de alta concentración de fluido a las de baja concentración.

Designemos por P_0 un punto (x_0, y_0, z_0) interior al cuerpo y por S un plano o superficie suavemente curvada que pase por P_0 . En el momento t_0 el flujo $\Phi(x_0, y_0, z_0, t_0)$ de calor a través de S en P_0 es la cantidad de calor por unidad de área y por unidad de tiempo que

está pasando a través de S en aquel punto. El flujo se mide en calorías por centímetro cuadrado por segundo.

Si $u(x, y, z, t)$ expresa las temperaturas en los puntos del sólido en el momento t , y si n es una coordenada que representa la distancia normal a la superficie S en el punto interior P_0 (Fig. 3), el flujo a través de S será en la dirección positiva de n si du/dn es negativa. Un postulado fundamental de la teoría matemática de la conducción del calor dice que existe un coeficiente térmico K de la sustancia que forma el cuerpo tal que

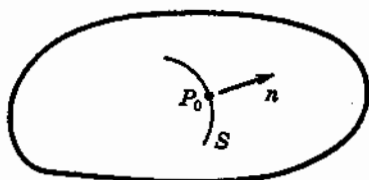


FIG. 3

$$(1) \quad \Phi = -K \frac{du}{dn} \quad (K > 0);$$

es decir, el flujo $\Phi(x_0, y_0, z_0, t_0)$ a través de S es proporcional al valor de la derivada de la función de la temperatura u a lo largo de la normal a S en el punto P_0 y en el momento t_0 . El coeficiente K se denomina *conductividad térmica* de la sustancia.

En particular, el flujo a través de los planos $x = x_0$, $y = y_0$ y $z = z_0$ en el punto P_0 tiene los valores

$$(2) \quad \Phi_1 = -Ku_x, \quad \Phi_2 = -Ku_y, \quad \Phi_3 = -Ku_z,$$

respectivamente, cuando se toma el valor de las derivadas parciales en P_0 , t_0 . Para un valor fijo de t , u_x , u_y y u_z son los componentes del gradiente de u . Puesto que la dirección del vector $\text{grad } u$ es aquella para la que u aumenta más rápidamente, el vector

$$(3) \quad \mathbf{J} = -K \text{ grad } u$$

se denomina *velocidad del flujo calorífico* en el punto, y mide el flujo a través de la superficie isoterma

$$u(x, y, z, t_0) = u(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

en P_0 . La proyección $J_{(n)}$ de \mathbf{J} sobre la normal a la superficie arbitraria S , es el flujo Φ dado por la fórmula (1):

$$J_{(n)} = \Phi = -K \frac{du}{dn}$$

Otro coeficiente térmico de la sustancia es la *capacidad calorífica c_0 por unidad de volumen o calor específico*, que es la cantidad de calor

necesario para elevar la temperatura de una unidad de volumen de la sustancia en una unidad de la escala de temperaturas.

A menos que se diga otra cosa, *supondremos aquí que los coeficientes c_0 y K son constantes*. En este caso un *segundo postulado* de la teoría matemática es que la conducción lleva a una distribución de temperaturas, la función u , que, junto con su derivada u_t , y sus derivadas de primer y segundo orden con respecto a x, y y z , son todas funciones continuas en la totalidad de cualquier dominio interior del sólido en el que no se genere calor.

Para deducir la ecuación diferencial que u satisface, consideremos primero una superficie esférica S_0 con centro en P_0 lo suficientemente pequeña para que todos los puntos dentro y sobre S_0 sean interiores al cuerpo sólido. La integral de $c_0 u(x, y, z, t)$ extendida a la región R_0 limitada por S_0 es una medida del contenido instantáneo de calor $Q(t)$ de R_0 . Por tanto,

$$(4) \quad Q'_0(t) = \frac{d}{dt} \int \int \int_{R_0} c_0 u \, dV = c_0 \int \int \int_{R_0} \frac{\partial u}{\partial t} \, dV,$$

donde dV designa el elemento de volumen en la integral.

El calor penetra en R_0 solamente por conducción a través de su superficie límite S_0 . Si n es distancia normal a esa superficie positiva, en dirección hacia afuera, y si dA designa el elemento de área de S_0 , entonces la derivada con respecto al tiempo $Q'_0(t)$ del calor que penetra en la esfera puede tener también la expresión

$$(5) \quad Q'_0(t) = \int \int_{S_0} K \frac{du}{dn} \, dA = - \int \int_{S_0} J_{(n)} \, dA.$$

De acuerdo con el teorema de la divergencia para transformar integrales de superficie en integrales de volumen,

$$(6) \quad \int \int_{S_0} J_{(n)} \, dA = \int \int \int_{R_0} \operatorname{div} \mathbf{J} \, dV.$$

Según eso, la fórmula (5) puede escribirse

$$(7) \quad Q'_0(t) = - \int \int \int_{R_0} \operatorname{div} \mathbf{J} \, dV = K \int \int \int_{R_0} \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) \, dV.$$

Ahora bien, $\operatorname{div} (\operatorname{grad} u)$ es la laplaciana

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz};$$

por tanto, se deduce de las expresiones (4) y (7) que

$$(8) \quad \int \int \int_{R_1} (c_0 u_t - K \nabla^2 u) dV = 0.$$

La Ec. (8) es válida para toda la región esférica R_0 que contenga a P_0 , con la sola condición de que todos los puntos de R_0 sean interiores del sólido y que R_0 esté libre de fuentes caloríficas. El integrando es una función continua de x, y y z en R_0 , en el momento t . Si el integrando tiene un valor positivo en P_0 , su continuidad exige la existencia de una región esférica R_1 que contenga a P_0 y contenida en R_0 , tal que $c_0 u_t - K \nabla^2 u > 0$ en la totalidad de R_1 . La integral de la Ec. (8), con R_0 remplazado por R_1 , tendría entonces un valor positivo en lugar del valor cero. Aparece la contradicción correspondiente si suponemos que el integrando tiene en P_0 un valor negativo. Por tanto, en P_0

$$c_0 u_t - K \nabla^2 u = 0.$$

Como P_0 representa cualquier punto interior del cuerpo en un dominio libre de fuentes, la función de distribución de temperaturas $u(x, y, z, t)$ en todo dominio que cumpla esa condición satisface la *ecuación del calor*

$$(9) \quad u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

donde k es la difusividad térmica de la sustancia

$$(10) \quad k = \frac{K}{c_0}.$$

7. Discusión de la ecuación del calor. Si las temperaturas dentro de un sólido son independientes de z , esto es, si no hay flujo de calor en la dirección z , la ecuación del calor se reduce a la ecuación correspondiente al flujo bidimensional paralelo al plano xy :

$$(1) \quad u_t = k(u_{xx} + u_{yy}).$$

Es el caso de flujo unidimensional paralelo al eje de las x , la ecuación se convierte en

$$(2) \quad u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t).$$

Cuando las temperaturas están en *estado estacionario*, es decir, cuando u no varía con el tiempo, la ecuación del calor se convierte

en la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$:

$$(3) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Hasta aquí hemos supuesto que el calor no se genera ni se pierde dentro del sólido, sino que solamente se transfiere por conducción. En el caso de que exista una fuente uniforme en la totalidad del volumen del sólido que genere calor en una proporción constante q , donde q expresa la cantidad de calor generado en la unidad de volumen y en la unidad de tiempo, la ecuación del calor tome la fuerza

$$(4) \quad c_0 u_t = K \nabla^2 u + q.$$

La deducción de la ecuación del calor en la Sec. 6 puede modificarse para obtener la fórmula (4) si el postulado de la continuidad de u y de sus derivadas se amplía para incluir los casos en que esté presente una fuente uniforme y constante.

Las condiciones de contorno que describen las condiciones térmicas en la superficie del sólido y la distribución inicial de temperaturas en todo el volumen del mismo deben acompañar a la ecuación del calor si queremos determinar la función de temperaturas u . Si, por ejemplo, el plano $x = 0$ es una superficie límite que se encuentra perfectamente aislada, la condición de contorno es en este caso

$$(5) \quad u_x(0, y, z, t) = 0$$

porque $-Ku_x(0, y, z, t)$ es el flujo de calor a través de este plano.

El postulado $\Phi = -K du/dn$ se aplica también a la difusión simple para representar el flujo de una sustancia que se está difundiendo dentro de un sólido poroso. En este caso la función u expresa *concentración* (masa de la sustancia que se difunde por unidad de volumen del sólido) y K es el *coeficiente de difusión*. Puesto que el contenido de la sustancia en una región dada es la integral de u extendida a toda la región, podemos remplazar en la deducción de la Sec. 6, c_0 por la unidad y podremos comprobar que la concentración u satisface la ecuación de la difusión

$$(6) \quad u_t = K \nabla^2 u.$$

PROBLEMAS

1. Sea $u(x)$ la función de distribución de temperaturas en régimen estacionario en una barra limitada por los planos $x = 0$ y $x = b$, cuando estos límites se conservan a las temperaturas fijas $u = 0$ y $u = u_0$ respectiva-

mente. Plantear el problema de contorno para $u(x)$ y resolverlo para demostrar que

$$u(x) = \frac{u_0}{b} x, \quad \Phi = -K \frac{b}{u_0},$$

donde Φ es el flujo de calor a través de cualquier plano $x = x_0$ ($0 \leq x_0 \leq b$).

2. Una barra ocupa la región $0 \leq x \leq b$. Hay un flujo constante de calor $\Phi = \phi_0$ que penetra en la barra a través de la cara $x = 0$. La cara $x = b$ se conserva a la temperatura $u = 0$. Plantear y resolver el problema de contorno para la distribución de temperaturas en estado estacionario $u(x)$ en la barra.

$$\text{Solución: } u(x) = \frac{\phi_0}{k} (b - x).$$

3. La barra $0 \leq x \leq b$ está sujeta a una *transmisión de calor superficial* por sus caras $x = 0$ y $x = b$ al medio que la rodea, de acuerdo con la ley lineal siguiente. El flujo que sale de cada cara es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la cara y la temperatura del medio adyacente. Sea la constante positiva H el factor de proporcionalidad para ambas caras. Si el medio $x < 0$ tiene la temperatura cero y el medio $x > b$ tiene la temperatura constante T_1 , verificar que el problema de contorno para las temperaturas de régimen estacionario $u(x)$ en la barra es

$$Ku''(0) = Hu'(0), \quad -Ku'(b) = H[u(b) - T_1],$$

$$u''(x) = 0 \quad (0 < x < b),$$

Poner $h = H/K$ y demostrar que

$$u(x) = \frac{T_1}{bh + 2} (hx + 1).$$

4. Si en todo el interior de un sólido se genera calor en una cantidad q por unidad de volumen y en la unidad de tiempo, indicar por qué la Ec. (5) de la Sec. 6 debe ser modificada para que quede en la forma

$$Q'_0(t) = - \int \int_{S_1} J_{(n)} dA + \int \int \int_{R_0} q dV.$$

Sea q una constante o una función continua de x, y, z . Postulemos ahora como anteriormente la continuidad de u y sus derivadas. Completar la deducción de la forma (4), Sec. 7, de la ecuación del calor cuando q es la función que se ha dicho.

5. Sea $u(x, t)$ la distribución de temperaturas dentro de un sólido que no contiene fuentes. Considérese un elemento cilíndrico interior al sólido tal que el eje del cilindro sea paralelo al eje de las x y de longitud Δx . Si el área de la base del cilindro es A , demostrar por qué

$$A[-Ku_x(x, t) + Ku_x(x + \Delta x, t)] = c_0 A \Delta x u_t(x, t)$$

aproximadamente si Δx es pequeño, y obtener así la Ec. (2), Sec. 7.

6. Supóngase que en el Prob. 5 se genera calor en una cantidad constante q por unidad de volumen y en la unidad de tiempo en la totalidad del sólido y dedúzcase la ecuación.

$$c_0 u_t = Ku_{xx} + q.$$

7. Sea $u(x, t)$ la distribución de temperaturas en un alambre delgado extendido a lo largo del eje de las x cuando la transmisión de calor tiene lugar a lo

largo del alambre hacia el medio ambiente que se encuentra a la temperatura fija T_0 . Si la transmisión de calor en la unidad de tiempo por unidad de longitud del alambre es proporcional a $u(x,t) - T_0$, utilizar el procedimiento indicado en el Prob. 5 para deducir la ecuación

$$u_t = ku_{xx} - h(u - T_0) \quad (h \text{ constante, } h > 0).$$

8. Si los coeficientes térmicos c_0 y K son funciones de x, y, z y t , modificar la deducción de la Sec. 6 para demostrar que la ecuación del calor toma la forma

$$c_0 u_t = (Ku_x)_x + (Ku_y)_y + (Ku_z)_z$$

en un dominio donde todas las funciones y derivadas que comprende esta ecuación sean continuas.

8. Ecuación de Laplace. Una función $u(x,y,z)$ continua, con derivadas parciales de primer y segundo orden también continuas y que satisface la ecuación de Laplace

$$(1) \quad \nabla^2 u = 0,$$

donde ∇^2 es el operador de Laplace

$$(2) \quad \nabla^2 u = \text{div}(\text{grad } u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

se llama *función armónica*.

Hemos visto que las temperaturas en el estado estacionario en los puntos interiores de un sólido en el que no se genera calor están representadas por una función armónica u . De hecho, la función temperatura sirve como función potencial para el flujo de calor, en el sentido de que $-K \text{ grad } u$ representa la velocidad del flujo calorífico por conducción, y por consiguiente, $-K du/dn$ representa el flujo calorífico en la dirección de la coordenada n .

La concentración en el estado estacionario de una sustancia que se difunde (Sec. 7) está representada igualmente por una función armónica. La Ec. (5), Sec. 5, nos muestra que los desplazamientos estáticos transversales $z(x,y)$ de una membrana tensa satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones. En este caso los desplazamientos son el resultado de desplazamientos perpendiculares al plano xy de partes del bastidor que soporta la membrana cuando no actúan fuerzas exteriores más que en el contorno.

Entre los muchos ejemplos físicos de funciones armónicas, uno sobresaliente es el potencial de velocidades en el movimiento permanente irrotacional de un fluido incompresible, de gran interés en hidrodinámica y aerodinámica ¹.

¹ Ver Cap. 9 del libro del mismo autor «Complex Variables and Applications» relacionado en la bibliografía al final del libro.

Una función armónica importante en la teoría del campo eléctrico es el potencial electrostático $V(x,y,z)$ en una región del espacio libre de cargas eléctricas. El potencial puede estar producido por alguna distribución de cargas eléctricas situadas fuera de aquella región. El vector-grad V representa la intensidad de campo electrostático en (x,y,z) que es la fuerza eléctrica que se ejercería sobre la unidad de carga positiva colocada en aquel punto. El hecho de que V sea armónica es una consecuencia de la Ley de atracción o repulsión entre cargas eléctricas en proporción inversa al cuadrado de la distancia.

Análogamente, el potencial gravitatorio es una función armónica en los dominios del espacio que no contienen materia.

Los problemas físicos tratados en este libro pueden limitarse a aquellos para los que en este capítulo se han deducido sus ecuaciones diferenciales. Se muestran ecuaciones satisfechas por otras pocas funciones de las ciencias físicas con objeto de indicar la gran variedad de aplicaciones de las ecuaciones en derivadas parciales. Las deducciones de las ecuaciones para otras funciones podrán encontrarse en textos de hidrodinámica, elasticidad, vibraciones y sonido, teoría de campos eléctricos, teoría del potencial y otras ramas de la mecánica del continuo.

9. **Coordenadas cilíndricas y esféricas.** Las coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) mostradas en la Fig. 4 determinan un punto P cuyas coordenadas cartesianas rectangulares son

$$(1) \quad x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z.$$

Según eso, ρ y ϕ son las coordenadas polares del punto Q en el plano xy , donde Q es la proyección de P sobre este plano.

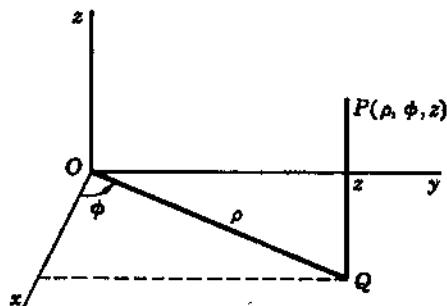


FIG. 4

Las relaciones (1) pueden escribirse

$$(2) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = z,$$

donde el cuadrante al que pertenece el ángulo ϕ está determinado por los signos de x e y , y no solamente por la relación y/x .

Sea u una función de x , y y z . Según la Ec. (1) es también una función de las tres variables independientes ρ , ϕ y z . Si u y sus derivadas de primero y segundo orden con respecto a estas variables son funciones continuas, podremos obtener la laplaciana de u relativa a estas variables con el empleo repetido de la regla de derivación de funciones compuestas.

Teniendo presentes las Ecs. (2) se obtiene

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{y}{x^2 + y^2},$$

donde y y z se conservan fijas en la derivación $\partial/\partial x$, mientras que ρ y z se conservan fijas en la derivación $\partial/\partial \rho$, y así sucesivamente, ϕ se mide en radianes. Análogamente

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

De la fórmula (3) se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\rho} \right) - \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{\rho^2} \right) + \frac{x}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right).$$

Efectuando las operaciones de derivación indicadas en los dos últimos términos, dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \frac{x}{\rho} - \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial \rho} \frac{y}{\rho^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} \frac{x}{\rho} - \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \frac{y}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo y simplificando, se encuentra que

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{\rho^3} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{x^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{2xy}{\rho^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{y^2}{\rho^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

De manera semejante se encuentra partiendo de la Ec. (4) que

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{\rho^3} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{y^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2xy}{\rho^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{x^2}{\rho^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

Por tanto, la *laplaciana de u en coordenadas cilíndricas es*

$$(7) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Agrupando los dos primeros términos y empleando la notación con subíndices para expresar las derivadas parciales, se puede escribir en la forma

$$(8) \quad \nabla^2 u = \rho^{-1}(\rho u_{,\rho})_{,\rho} + \rho^{-2} u_{,\phi\phi} + u_{zz}$$

Las *coordenadas esféricas* (r, ϕ, θ) de un punto (Fig. 5) están relacionadas con x, y y z como sigue:

$$(9) \quad x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

La coordenada ϕ es común a las coordenadas cilíndricas y esféricas, mientras que las otras coordenadas en los dos sistemas están

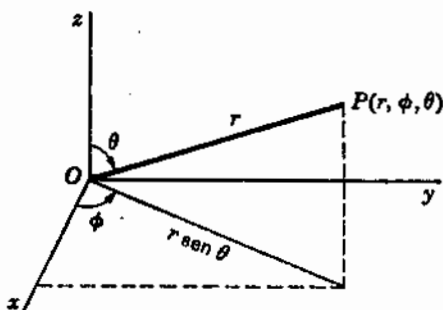


FIG. 5

relacionadas por ecuaciones de la misma forma que las Ecs. (1), a saber,

$$(10) \quad z = r \cos \theta, \quad \rho = r \sin \theta.$$

En consecuencia, la expresión (7) puede transformarse a coordenadas esféricas siguiendo los pasos que corresponden a los usados anterior-

mente ó por el cambio de letras apropiado. Efectuando las operaciones correspondientes se obtiene como expresión de la *laplaciana en coordenadas esféricas*

$$(11) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Otra forma de esta expresión es

$$(12) \quad \nabla^2 u = \frac{1}{r} (ru)_{rr} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\phi\phi} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (u, \text{sen } \theta)_\theta.$$

PROBLEMAS

1. Deducir las fórmulas (4) y (6) de esta sección.
2. Suponiendo que $u(x, y, z)$ y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son funciones continuas, transformar el segundo miembro de la fórmula (7) en $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.
3. Demostrar que la fórmula (12) es la misma que la (11).
4. Deducir la fórmula (11) de la fórmula (7). *Sugerencias.* Cuando ϕ es fija, u es función de las variables independientes z y ρ o, según las Ec. (10), de r y θ . Obtener primero la fórmula

$$u_\rho = u_r r^{-1} + u_z z r^{-2}$$

que corresponde a la Ec. (4), después la fórmula

$$u_{zz} + u_{\rho\rho} = u_{rr} + r^{-1} u_r + r^{-2} u_{\theta\theta},$$

correspondiente a la fórmula (7) cuando $u = u(x, y)$.

5. Sea $u(r)$ la función de temperaturas en estado estacionario en un sólido limitado por dos esferas concéntricas $r = 1$ y $r = r_0$ ($0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$), cuando $u = 0$ en la superficie interior $r = 1$ y $u = u_0$ en la exterior $r = r_0$ donde u_0 es una constante. Explicar por qué la ecuación del calor para $u(r)$ se reduce a

$$\frac{d^2}{dr^2} (ru) = 0$$

y obtener la fórmula

$$u(r) = \frac{r_0 u_0}{r_0 - 1} \left(1 - \frac{1}{r} \right) \quad (1 \leq r \leq r_0).$$

6. Sea $z(\rho)$ una función que representa los desplazamientos estáticos transversales de una membrana estirada entre dos circunferencias $\rho = 1$ y $\rho = \rho_0$ en el plano $z = 0$ después de que el soporte exterior $\rho = \rho_0$ ha sido desplazado una distancia $z = z_0$. Indicar por qué el problema de contorno en $z(\rho)$ puede escribirse

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dz}{d\rho} \right) = 0 \quad (1 < \rho < \rho_0),$$

$$z(1) = 0, \quad z(\rho_0) = z_0,$$

y obtener la fórmula

$$z(\rho) = z_0 \frac{\log \rho}{\log \rho_0} \quad (1 \leq \rho \leq \rho_0).$$

7. Indicar por qué las temperaturas en estado estacionario $u(\rho)$ en un cilindro hueco $1 \leq \rho \leq \rho_0$, $-\infty < z < \infty$, satisface también el problema de contorno enunciado en el Prob. 6 si $u = 0$ sobre la superficie cilíndrica interior y $u = z_0$ sobre la superficie $\rho = \rho_0$. Según ello, el Prob. 6 es una analogía en membrana de este problema. Se han utilizado películas de jabón para poner de manifiesto estas analogías.

8. Una fuerza transversal uniforme, de F_0 unidades por unidad de área, actúa sobre una membrana estirada entre las circunferencias $\rho = 1$, $z = 0$ y $\rho = \rho_0$, $z = 0$. Teniendo presente el Prob. 8, Sec. 5, demostrar que los desplazamientos estáticos transversales $z(\rho)$ satisfacen la ecuación

$$(\rho z')' + k_0 z = 0 \quad (k_0 = F_0 H^{-1}),$$

y deducir la fórmula

$$z(\rho) = \frac{k_0}{4} (\rho_0^2 - 1) \left(\frac{\log \rho}{\log \rho_0} - \frac{\rho^2 - 1}{\rho_0^2 - 1} \right) \quad (1 \leq \rho \leq \rho_0).$$

10. Tipos de ecuaciones y condiciones. La ecuación en derivadas parciales lineales de segundo orden en $u(x, y)$,

$$(1) \quad Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G,$$

donde A, B, \dots, G son constantes o funciones de x e y solamente, es de tipo *elíptico*, *parabólico*, o *hiperbólico* en un dominio del plano xy si los valores de la función $B^2 - 4AC$ son negativos, cero o positivos, respectivamente, en la totalidad del dominio. Los tres tipos requieren diferentes clases de condiciones de contorno para determinar una solución.

La ecuación de Poisson en $u(x, y)$, $\nabla^2 u = G$, y la ecuación de Laplace son casos especiales de la Ec. (1) en la que $A = C = 1$, y B, D, E y F son cero. Por tanto, esas ecuaciones son elípticas en cualquier dominio. La ecuación del calor $u_{xx} - ku_y = 0$ es parabólica, y la ecuación de las ondas $u_{xx} - a^2 u_{yy} = 0$ es hiperbólica.

En la teoría de ecuaciones en derivadas parciales¹ se demuestra que la Ec. (1) puede reducirse a formas generalizadas de la ecuación de Poisson o a la ecuación del calor o a la de las ondas, según que la Ec. (1) sea elíptica, parabólica o hiperbólica. Las reducciones se efectúan sustituyendo las variables independientes x e y por otras nuevas.

Otra forma especial de la Ec. (1) es la *ecuación de los telegrafistas*.

$$(2) \quad v_{xx} = KLv_{tt} + (KR + LS)v_t + R Sv.$$

¹ Ver, por ejemplo, los textos sobre ecuaciones en derivadas parciales de Courant y Hilbert, tomo 2.º, de Frank y V. Mises, o el de Greenspan citados en la Bibliografía.

Aquí $v(x,t)$ representa la diferencia de potencial o la corriente en el momento t en un punto que dista x unidades de un extremo de la línea de transmisión o cable que posee una capacidad K , autoinducción L , resistencia R y conductancia de un conductor a otros, todas por unidad de longitud. La ecuación es hiperbólica si $KL > 0$. Es parabólica en el caso de que K o L sean nulos.

Sea u la función incógnita en un problema de contorno. Una ecuación que prescriba los valores de la propia u a lo largo del contorno se conoce como condición de contorno del tipo *Dirichlet*. Un problema que consista en determinar una función armónica en el interior de un recinto, de modo que esa función tome valores prescritos sobre el contorno del recinto es un *problema de Dirichlet*. En este caso los valores de la función pueden interpretarse como temperaturas en régimen estacionario y esta interpretación física nos lleva a esperar que un problema de Dirichlet pueda tener una solución única, si las funciones consideradas cumplen ciertas exigencias en cuanto a su regularidad.

Una condición de contorno del *segundo tipo*, conocida como *condición de Neumann*, prescribe los valores de la derivada a lo largo de la normal du/dn de la función en el contorno. Entre otras clases de condiciones de contorno están las del *tercer tipo* en las que se prescriben los valores de $hu + du/dn$ en el contorno, donde h es o una constante o una función de las variables independientes.

Si la ecuación en derivadas parciales en u es de segundo orden respecto a una de las variables independientes t , y si los valores tanto de u como u_t están prescritos en un contorno $t = 0$, la condición de contorno es del tipo *Cauchy* con respecto a t . Cuando la ecuación diferencial es la ecuación de las ondas $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, tal condición corresponde físicamente a la de prescribir los valores iniciales tanto de los desplazamientos transversales u como de las velocidades u_t de una cuerda tensa. Ambas condiciones aparecen como necesarias si han de determinarse los desplazamientos $u(x,t)$.

Sin embargo, cuando se trata de la ecuación de Laplace $u_{xx} = -u_{yy}$ o de la del calor $ku_{xx} = u_t$, las condiciones del tipo de Cauchy con respecto a x no pueden ser impuestas sin severas restricciones. Esto se intuye como en lo anterior, interpretando u físicamente, como función de temperaturas. Cuando se prescribe la temperatura u sobre el contorno $x = 0$, el flujo Ku_x a través del mismo está determinado ordinariamente por los valores que allí tiene u y por otras condiciones del problema. Recíprocamente, si se prescribe el flujo $Ku_x(0,t)$, se necesitan unas determinadas temperaturas $u(0,t)$ para producir ese flujo.

CAPITULO 2

SUPERPOSICION DE SOLUCIONES

11. Combinaciones lineales. Si c_1 y c_2 son constantes y u_1 y u_2 son funciones, entonces la función

$$c_1u_1 + c_2u_2$$

se llama *combinación lineal* de las funciones u_1 y u_2 . Obsérvese que c_1u_1 , c_2u_2 y $u_1 \pm u_2$ son casos particulares.

De acuerdo con las propiedades elementales de las derivadas, la derivada de una combinación lineal de dos funciones puede escribirse como combinación lineal de las derivadas de las funciones

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} (c_1u_1 + c_2u_2) = c_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Un *operador lineal* aplicado a funciones es un operador L que transforma a cada una de las funciones u pertenecientes a una cierta clase en otra Lu y que tiene la siguiente propiedad: para todos los pares de funciones u_1 y u_2 de aquella clase se verifica que

$$(2) \quad L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Lu_1 + c_2Lu_2,$$

siempre que c_1 y c_2 sean constantes. En particular se tendrá

$$L(c_1u_1) = c_1Lu_1, \quad L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2, \quad L(0) = 0$$

La propiedad (2) puede extenderse inmediatamente, porque si u_3 es una tercera función de la clase citada, se verifica

$$\begin{aligned} L(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) &= L(c_1u_1 + c_2u_2) + c_3Lu_3 \\ &= c_1Lu_1 + c_2Lu_2 + c_3Lu_3. \end{aligned}$$

Procediendo por inducción se encuentra que L transforma las combinaciones lineales de n funciones de este modo

$$(3) \quad L\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i L u_i.$$

Según Ec. (1), $\partial/\partial x$ es un operador lineal cuando se aplica a funciones que tengan derivadas parciales de primer orden con respecto a x . Se le conoce con el nombre de operador lineal *diferencial*. El operador $f(x,y) \times$ que transforma una función $u(x,y)$ en el producto fu es un ejemplo de operador lineal todavía más elemental. Veremos ahora por qué también son operadores lineales las expresiones $f\partial/\partial x$, $\partial^2/\partial x^2$ y $f\partial/\partial x + \partial^2/\partial x^2$.

Dados dos operadores lineales L y M , distintos o no, tales que M transforma a cada una de las funciones u de una cierta clase en una función Mu a la cual se aplica L , entonces si u_1 y u_2 son dos funciones de la clase citada, se verifica según (2) que

$$(4) \quad LM(c_1 u_1 + c_2 u_2) = L(c_1 M u_1 + c_2 M u_2) = c_1 L M u_1 + c_2 L M u_2.$$

Es decir, el *producto* LM de operadores lineales es un operador lineal. Por consiguiente, en el caso de que tanto L como M representen a $\partial/\partial x$ se verifica que $\partial^2/\partial x^2$ es un operador lineal para la clase de todas las funciones u que tengan derivadas u_x y u_{xx} . De forma semejante si M es $\partial/\partial x$ y L es $f(x,y) \times$, resulta que $f\partial/\partial x$ es un operador lineal aplicable a $u(x,y)$.

La *suma* de dos operadores lineales viene definida por la ecuación

$$(5) \quad (L + M)u = Lu + Mu.$$

Si en ella remplazamos u por $c_1 u_1 + c_2 u_2$, se ve que la suma $L + M$ es un operador lineal y en consecuencia que la suma de un número finito de operadores lineales es lineal.

Cada término de una ecuación diferencial lineal homogénea en u consiste en el producto de una función de las variables independientes por una de las derivadas de u o por la propia u . Por tanto, toda ecuación diferencial lineal homogénea tiene la forma

$$(6) \quad Lu = 0,$$

donde L es un operador diferencial lineal. En el caso de que

$$(7) \quad L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F \times,$$

por ejemplo, donde las letras A a F indican funciones de x e y solamente, (6) es la ecuación en derivadas parciales lineal homogénea en $u(x,y)$ de segundo orden.

Las condiciones de contorno lineales homogéneas tienen también la forma (6). Aquí, las variables que aparecen como argumentos de u y como argumentos de las funciones que sirven como coeficientes del operador lineal L tienen la limitación de que deben representar puntos del contorno.

Sean ahora u_i funciones que satisfacen la Ec. (6), esto es, $Lu_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). De la Ec. (3) se deduce que toda combinación lineal de estas funciones, también satisface aquella ecuación. Enunciamos el *principio de superposición* de soluciones, fundamental para uno de los métodos más poderosos de resolución de problemas de contorno lineales, como sigue.

Teorema 1. *Si cada una de las n funciones u_1, u_2, \dots, u_n satisface una ecuación diferencial lineal homogénea, entonces, cualquier combinación lineal de esas funciones*

$$(8) \quad u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n,$$

donde las c son constantes arbitrarias, satisface aquella ecuación diferencial. Si cada una de las n funciones satisface una condición de contorno lineal homogénea, entonces cualquier combinación lineal (8) satisface esa condición de contorno.

12. Ejemplos. El principio de superposición es de utilidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, de las soluciones particulares $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ de la ecuación lineal homogénea $y'' - y = 0$, puede obtenerse la solución general $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Para ilustrar la aplicación del Teorema 1 a las ecuaciones en derivadas parciales, consideremos la ecuación del calor, lineal homogénea

$$(1) \quad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

y las dos condiciones de contorno lineales homogéneas

$$(2) \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0.$$

Es fácil comprobar que cada una de las funciones

$$u_0 = 1, \quad u_n = \exp(-n^2 \pi^2 t) \cos n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots),$$

donde $\exp r$ indica la función exponencial e^r , satisface la Ec. (1) y las condiciones (2). Por tanto, toda combinación lineal

$$(3) \quad u = c_0 + \sum_{n=1}^m c_n \exp(-n^2 \pi^2 t) \cos n\pi x$$

de aquellas funciones satisface la Ec. (1) y las condiciones (2).

Debe hacerse notar un principio de superposición para ecuaciones lineales no homogéneas. La función

$$(4) \quad u = u_1 + u_2$$

claramente satisface la ecuación diferencial lineal

$$(5) \quad Lu = f_1 + f_2,$$

donde f_1 y f_2 son funciones de las variables independientes solamente, si

$$(6) \quad Lu_1 = f_1 \quad \text{y} \quad Lu_2 = f_2,$$

donde L es el mismo operador diferencial lineal de la Ec. (5). Obsérvese que en el caso de que f_1 es idénticamente cero, entonces u_1 es una solución de la ecuación homogénea $Lu_1 = 0$.

El principio es también válido cuando las Ecs. (5) y (6) representan condiciones de contorno lineales.

13. Series de soluciones. Con objeto de extender los resultados anteriores sobre combinaciones lineales de soluciones a una sucesión infinita de funciones u_1, u_2, \dots , trataremos primeramente de la convergencia y derivabilidad de una serie infinita de funciones.

Sean las constantes c_n y las funciones u_n tales que la serie infinita de términos $c_n u_n$ converge en algún dominio de las variables independientes. La suma de esta serie es una función u ,

$$(1) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n.$$

Si x representa una de las variables independientes, la serie es *derivable*, o *derivable término a término*, con respecto a x si sus términos son tales que existen las derivadas $\partial u_n / \partial x$ y $\partial u / \partial x$ y, además, la serie de las funciones $c_n \partial u_n / \partial x$ converge hacia $\partial u / \partial x$; esto es, si

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}.$$

Nótese que una serie para ser derivable debe ser convergente necesariamente. Las condiciones de derivabilidad suficientes se indicarán en la Sec. 14.

Si, además, la serie (2) es derivable con respecto a x , entonces la

serie (1) es derivable dos veces respecto a x , y así sucesivamente para otras derivadas.

Sea f una función de las variables independientes. De acuerdo con la definición de la suma de una serie infinita, se deduce de la Ec. (2) que

$$(3) \quad f \frac{\partial u}{\partial x} = f \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m c_n \frac{\partial u_n}{\partial x} = \lim_{m \rightarrow \infty} f \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^m c_n u_n.$$

Aquí puede remplazarse el operador $\partial/\partial x$ por otras derivadas si la serie las admite. Sea L un operador lineal que consiste en el producto de una función f por una derivada, o una suma de un número finito de tales términos. Sumando miembro a miembro ecuaciones semejantes a la (3) se tendrá que

$$(4) \quad Lu = \lim_{m \rightarrow \infty} L \left(\sum_{n=1}^m c_n u_n \right).$$

La suma del segundo miembro de la Ec. (4) es una combinación lineal de las funciones u_1, u_2, \dots, u_m . Si cada una de las funciones u_n satisface la ecuación diferencial lineal homogénea $Lu_n = 0$, se deduce entonces del Teorema 1 que

$$L \left(\sum_{n=1}^m c_n u_n \right) = 0$$

para cualquier m ; por tanto, $Lu = 0$, según la Ec. (4).

Una condición de contorno lineal homogénea puede representarse también por una ecuación $Lu = 0$. En este caso podemos exigir que la función Lu satisfaga una condición de continuidad en puntos del contorno para que sus valores en ellos representen los límites de los valores que va tomando la función al aproximarse a aquellos puntos desde el interior del dominio.

Queda, pues, establecida la siguiente generalización del Teorema 1.

Teorema 2. *Si cada una de las funciones de la sucesión infinita u_1, u_2, \dots satisface una ecuación diferencial o condición de contorno, ambas lineales homogéneas $Lu = 0$, la función*

$$(5) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$$

también satisface $Lu = 0$, supuesto que las constantes c_n y las funciones u_n son tales que la serie converge y es derivable para todas las deriva-

das que entran en L , y tales que las condiciones de continuidad exigidas en el contorno son cumplidas por Lu cuando $Lu = 0$ es una condición de contorno.

14. Convergencia uniforme. Ejemplo. Recordaremos algunos extremos sobre las series de funciones uniformemente convergentes ¹.

Sea $S(x)$ la suma de una serie infinita de funciones $v_n(x)$, convergentes para todos los valores de x en un cierto intervalo,

$$(1) \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

donde $S_m(x)$ es la suma parcial formada por los m primeros términos de la serie. La serie converge *uniformemente* respecto a x si el valor absoluto de su resto $R_m(x) = S(x) - S_m(x)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, para cualquier valor de x en el intervalo, tomando m suficientemente grande; esto es, si para cada número positivo arbitrario ϵ existe un entero m , independiente de x tal que

$$(2) \quad |S(x) - S_m(x)| < \epsilon \quad \text{siempre que } m > m, (a \leq x \leq b).$$

El criterio M de Weierstrass proporciona una *condición suficiente* muy útil: Si existe una serie convergente de constantes positivas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n, \text{ tal que}$$

$$(3) \quad |v_n(x)| \leq M_n \quad (a \leq x \leq b),$$

la serie (1) es uniformemente convergente en el mismo intervalo.

Debido a que $S(x) = S_m(x) + R_m(x)$ y que $|R_m(x)|$ es uniformemente pequeño cuando m es suficientemente grande, pueden establecerse las siguientes propiedades de las series uniformemente convergentes.

Si las funciones $v_n(x)$ son continuas, y si la serie (1) es uniformemente convergente, entonces la suma $S(x)$ de esta serie es también una función continua; esta serie puede integrarse término a término sobre el intervalo para dar la integral de $S(x)$ sobre el mismo intervalo.

Si las funciones v_n y sus derivadas v'_n son continuas, si la serie (1) converge, y si la serie cuyos términos son $v'_n(x)$ es uniformemente convergente, entonces la serie (1) es derivable con respecto a x .

Se llega a resultados análogos para las series de funciones de dos o más variables independientes.

¹ Véase, por ejemplo W. Kaplan, «Advanced Calculus», págs. 338 y siguientes, 1952.

Ejemplo. Utilicemos los resultados anteriores y el Teorema 2 para escribir una solución más general del ejemplo relativo a la ecuación del calor de la Sec. 12. Concretando, ahora exigimos a la función u que satisfaga la ecuación

$$(4) \quad u_{xx}(x,t) - u_t(x,t) = 0$$

en el dominio $0 < x < 1$, $t < t_0$ cuando $t_0 > 0$ y las dos condiciones en los límites del tipo de Neumann $x = 0$ y $x = 1$:

$$(5) \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0;$$

además, $u_x(x,t)$ ha de ser una función continua de x en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$ para cualquier t fijado ($t \geq t_0$). Entonces, $u_x(0,t)$ es precisamente el límite de $u_x(x,t)$ cuando x tiende a 0 desde el interior del intervalo, y análogamente para $u_x(1,t)$; es decir, las condiciones (5) llevan ahora consigo que

$$u_x(+0,t) = 0, \quad u_x(1-0,t) = 0 \quad (t \geq t_0 > 0).$$

Vimos en la Sec. 12 que todas las funciones de la sucesión infinita

$$u_0 = 1, \quad u_n = \exp(-n^2\pi^2 t) \cos n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots)$$

satisfacen las ecuaciones homogéneas (4) y (5). Estas funciones y sus derivadas parciales son continuas para todos los valores de x . Según el Teorema 2, la función

$$(6) \quad u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-n^2\pi^2 t) \cos n\pi x$$

también satisface las Ecs. (4) y (5) si los coeficientes constantes c_n de la serie infinita pueden restringirse de modo que la serie sea derivable una vez respecto a t y dos veces respecto a x y que u_x sea continua respecto a x ($0 \leq x \leq 1$). Demostraremos ahora por qué quedan satisfechas esas condiciones cuando la sucesión de constantes c_n es acotada, esto es, cuando existe un número N tal que

$$(7) \quad |c_n| \leq N \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Los términos $c_n u_n$ de la serie (6) satisfacen la condición

$$(8) \quad |c_n \exp(-n^2\pi^2 t) \cos n\pi x| \leq N \exp(-n^2\pi^2 t_0) \quad (t \geq t_0)$$

y el criterio del cociente prueba la convergencia de la serie cuyos términos son las constantes $N \exp(-n^2\pi^2 t_0)$ cuando $t_0 > 0$. La serie (6) es, por tanto, absolutamente convergente según el criterio de comparación y también uniformemente convergente con respecto a x y t según el criterio de Weierstrass. De manera semejante vemos que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (c_n u_n) \right| \leq N\pi n \exp(-n^2\pi^2 t_0).$$

La serie de constantes $n^k \exp(-n^2\pi^2 t_0)$, donde k es cualquier número entero, converge de acuerdo con el criterio del cociente. En consecuencia, la serie cuyos términos son $(c_n u_n)_x$ es uniformemente convergente con respecto a x ; de hecho, lo es con respecto al par x y t . La serie (6) es, por tanto, derivable con respecto a x , y la suma $u_x(x, t)$ de la serie derivada es continua con respecto a x para todos los valores de x cuando $t \geq t_0$.

La convergencia uniforme de la serie de derivadas $(c_n u_n)_{xx}$, que es la misma que $(c_n u_n)_t$, es también evidente. Así, la serie (6) es derivable dos veces con respecto a x y una vez con respecto a t . Su suma u satisface, por tanto, las condiciones (4) y (5), y contiene un número infinito de constantes c_n , arbitrarias excepto en que deben cumplir la condición (7) de estar acotadas.

Más tarde veremos que esas constantes pueden determinarse de forma que u satisfaga una condición inicial no-homogénea.

$$(9) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < 1).$$

Entonces, físicamente, u representará temperaturas en una barra $0 \leq x \leq 1$ con caras térmicamente aisladas, según las condiciones (5), y con temperaturas iniciales dadas por la condición (9). Obsérvese que la condición (9) es satisfecha por la función (6) si puede determinarse c_n de modo que f tenga la representación

$$(10) \quad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi x \quad (0 < x < 1).$$

PROBLEMAS

1. Verificar cada uno de los productos $u_n = \cos nx \sinh ny$, donde $n = 1, 2, \dots$, así como la función $u_0 = y$ satisface la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y las tres condiciones de contorno

$$u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = u(x, 0) = 0.$$

Aplicar después el Teorema 1 para demostrar que la combinación lineal

$$u = c_0 y + \sum_{n=1}^m c_n \cos nx \operatorname{senh} ny$$

satisface también la ecuación diferencial y las condiciones de contorno no indicadas. Determinar los valores de los coeficientes c_n para los cuales esa combinación lineal satisface también la condición de contorno no-homogénea

$$u(x, 2) = 4 + 3 \cos x - \cos 2x.$$

Solución $c_0 = 2$, $c_1 = 3/\operatorname{senh} 2$, $c_2 = -1/\operatorname{senh} 4$, $c_n = 0$ cuando $n > 2$.

2. Demostrar que todas las funciones

$$\exp [-(n - 1/2)\pi^2 t] \operatorname{sen} [(n - 1/2)\pi x] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

satisfacen la ecuación del calor

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

y las condiciones de contorno

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0.$$

Aplicar después el Teorema 1 para demostrar que la función

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m c_n \exp [-(n - 1/2)\pi^2 t] \operatorname{sen} [(n - 1/2)\pi x]$$

satisface también las tres ecuaciones. Determinar los valores de las constantes c_n tales que esta función satisfaga también la condición de contorno no-homogénea

$$u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{2}.$$

Solución $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1$, $c_n = 0$ cuando $n > 3$.

3. Verificar que dada una de las funciones

$$\operatorname{sen} mx \cos ny \exp (-z \sqrt{m^2 + n^2}) \\ (m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots)$$

satisface la ecuación en derivadas parciales de Laplace

$$u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) = 0$$

y las condiciones de contorno

$$u(0, y, z) = u(\pi, y, z) = u_y(x, 0, z) = u_y(x, \pi, z) = 0$$

Utilizar una superposición de soluciones para obtener una función que satisfaga no solamente la ecuación de Laplace y esas condiciones de contorno, sino también la condición

$$u_x(x, y, 0) = (-6 + 5 \cos 4y) \operatorname{sen} 3x.$$

$$\text{Solución } u = (2e^{-3z} - e^{-5z} \cos 4y) \operatorname{sen} 3x.$$

4. Sean u y v dos funciones que satisfacen la ecuación del calor en x y t ; esto es, $u_t = ku_{xx}$ y $v_t = kv_{xx}$, donde k puede ser una función de x y t . Multiplíquense los miembros de las dos ecuaciones por las constantes c_1 y c_2 , respectivamente, y efectúese la suma para demostrar que la combinación lineal $c_1u + c_2v$ satisface también la ecuación. Este procedimiento muestra una variación de la demostración del Teorema 1

5. Si un operador L tiene las dos propiedades

$$L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2, \quad L(cu) = cLu,$$

para las tres funciones u_1 , u_2 y u y para cualquier constante c , demostrar que L es lineal; esto es, demostrar que tiene la propiedad (2). Sec. 11.

6. Si u_1 y u_2 satisfacen una ecuación diferencial lineal no-homogénea $Lu = f$, donde f es una función de las variables independientes solamente, probar que la combinación lineal $c_1u_1 + c_2u_2$, no satisface esa ecuación si $c_1 + c_2 \neq 1$.

7. Obsérvese que las dos funciones $y_1 = x^{-1}$ e $y_2 = (x+1)^{-1}$ satisfacen la ecuación diferencial no-lineal $y' + y^2 = 0$. Si c es una constante ($c \neq 0$, $c \neq 1$), demostrar que ni cy_1 ni cy_2 satisfacen esa ecuación. Demostrar que tampoco la satisface la función $y_1 + y_2$.

8. Emplear casos especiales de operaciones lineales, tales como $Lu = xu$ y $Mu = \partial u / \partial x$ para demostrar que los operadores LM y ML no siempre son el mismo.

9. Si c_0 es una sucesión acotada de constantes e $y_0 > 0$, probar que la función

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-ny} \operatorname{sen} nx \quad (y \geq y_0)$$

es dos veces derivable con respecto a x e y , y que satisface la ecuación de Laplace en el dominio $y > y_0$.

10. Si $n^4 |c_n| \leq N$ ($n = 1, 2, \dots$), donde N es una constante, probar que la función

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx \cos nt$$

satisface la ecuación de las ondas $y_{tt} = y_{xx}$ para todos los valores de x y de t .

15. **Integrales de las soluciones.** Otro tipo de extensión del concepto de combinaciones lineales de funciones que satisfacen condiciones lineales homogéneas, se muestra con el siguiente ejemplo. Aquí la superposición consiste en una integración con respecto a un parámetro α en lugar de una suma con respecto a un parámetro n .

Las funciones del conjunto $\exp(-\alpha y)$ sen αx , donde el parámetro α es independiente de x e y , satisface la ecuación de Laplace.

$$(1) \quad u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

y la condición de contorno

$$(2) \quad u(0,y) = 0,$$

Las funciones indicadas están acotadas en el dominio $x > 0, y > 0$ cuando $\alpha \geq 0$. Podemos demostrar que su combinación del tipo

$$(3) \quad u(x,y) = \int_0^{\infty} g(\alpha) e^{-\alpha y} \text{sen } \alpha x \, d\alpha \quad (x > 0, y > 0)$$

representa también una solución de las condiciones homogéneas (1) y (2), acotadas en el dominio $x > 0, y > 0$ para toda función $g(\alpha)$ que esté acotada y sea continua en el intervalo semi-infinito $\alpha \geq 0$ y absolutamente integrable a lo largo de ese intervalo.

La función (3) satisface la condición de contorno

$$(4) \quad u(x,0) = \int_0^{\infty} g(\alpha) \text{sen } \alpha x \, d\alpha \quad (x > 0)$$

en la parte positiva del eje de las x . Con la teoría de las integrales de Fourier mostraremos más tarde cómo puede determinarse g , incluso cuando las condiciones anteriores relativas a g sean algo menos severas, de modo que la integral en la Ec. (4) represente una función dada $f(x)$.

Para demostrar que la Ec. (3) representa una función u acotada y continua que satisface las Ecs. (1) y (2), emplearemos los criterios de convergencia de las integrales impropias que son análogos a los de las series infinitas¹.

La integral de la Ec. (3) converge absoluta y uniformemente con respecto a x e y porque

$$(5) \quad |g(\alpha) e^{-\alpha y} \text{sen } \alpha x| \leq |g(\alpha)| \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

y g es independiente de x e y , y absolutamente integrable de cero a infinito con respecto a α . Además

$$(6) \quad |u(x,y)| \leq \int_0^{\infty} |g(\alpha) e^{-\alpha y} \text{sen } \alpha x| \, d\alpha \leq \int_0^{\infty} |g(\alpha)| \, d\alpha,$$

¹ Kaplan, ob. cit., págs. 372 y siguientes.

por tanto, u está acotada; asimismo, es función continua de x e y ($x \geq 0$, $y \geq 0$) a causa de la convergencia uniforme de la integral y la continuidad del integrando. Es claro que $u = 0$ cuando $x = 0$.

Cuando $y > 0$ es cierto que

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} g(\alpha) e^{-\alpha y} \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [g(\alpha) e^{-\alpha y} \operatorname{sen} \alpha x] \, d\alpha;$$

porque si $|g(\alpha)| \leq g_0$ e $y \geq y_0$, donde y_0 es algún número positivo pequeño, entonces el valor absoluto del integrando de lo integral de la derecha no supera a $g_0 \alpha \exp(-\alpha y_0)$, que es independiente de x e y e integrable de $\alpha = 0$ a $\alpha = \infty$. De ello se deduce que la integral es uniformemente convergente; por tanto, la integral (3) es derivable con respecto a x , y análogamente para las otras derivadas contenidas en el operador de Laplace $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Por tanto,

$$(8) \quad \nabla^2 u = \int_0^{\infty} g(\alpha) \nabla^2 [e^{-\alpha y} \operatorname{sen} \alpha x] \, d\alpha = 0 \quad (x > 0, y > 0).$$

16. Separación de variables. Tratemos de encontrar una fórmula para los desplazamientos transversales $y(x, t)$ de una cuerda estirada entre los puntos $(0, 0)$ y $(c, 0)$ si la cuerda se encuentra desplazada inicialmente a la posición $y = f(x)$ y desde ella se la deja libre.

Al llegar a este punto, algunos de los pasos conducentes a la solución deben ser *formales*, o de puro manejo de fórmulas y cálculo. Su validez no podrá ser establecida hasta un desarrollo posterior de la teoría.

Supondremos que a lo largo de la cuerda no actúan fuerzas exteriores. Entonces la función y satisface la ecuación de las ondas (Sec. 3).

$$(1) \quad y_{tt} = a^2 y_{xx}(x, t) \quad (0 < x < c, t > 0).$$

También debe satisfacer las siguientes condiciones de contorno:

$$(2) \quad y(0, t) = 0, \quad y(c, t) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0,$$

$$(3) \quad y(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq c),$$

donde la función de los desplazamientos prescrita f es continua en el intervalo $0 \leq x \leq c$ y $f(0) = f(c) = 0$.

Con objeto de encontrar un conjunto amplio de soluciones particulares de todas las condiciones homogéneas (1) y (2) del problema de

contorno anterior, utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias, determinaremos en primer lugar aquellas funciones del tipo

$$(4) \quad Y(x,t) = X(x)T(t)$$

que satisfagan las condiciones mencionadas. Obsérvese que X es solo función de x y T solo función de t .

Si Y satisface la Ec. (1), entonces

$$X(x)T'''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Dividiendo por $a^2 X T$ para separar las variables:

$$(5) \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$$

Siendo el primer miembro función de x solamente, no puede variar con t . Sin embargo, es igual a una función, que lo es solamente de t y que, por consiguiente, no puede variar con x . Por tanto, ambos miembros han de tener algún valor constante en común, que designaremos por $-\lambda$; esto es,

$$(6) \quad X''(x) = -\lambda X(x). \quad T''(t) = -\lambda a^2 T(t).$$

Si Y ha de satisfacer la primera de las condiciones (2), entonces $X(0)T(t)$ ha de anularse para todo valor de t ($t > 0$). El caso $T(t) = 0$ para cualquier t es trivial, puesto que la función $Y = 0$ siempre satisface ecuaciones homogéneas lineales; debe, pues, ser $X(0) = 0$. De modo semejante las dos últimas condiciones (2) quedan satisfechas por Y si $X(c) = 0$ y $T'(0) = 0$.

Resulta, pues, que Y satisface las condiciones (1) y (2) cuando X y T satisfacen estos dos problemas homogéneos:

$$(7) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(c) = 0,$$

$$(8) \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T'(0) = 0,$$

donde el parámetro λ tiene el mismo valor en ambos problemas. Para hallar soluciones no triviales de este par de problemas, observemos en primer lugar que el Prob. (8) tiene una sola condición de contorno y, por tanto, muchas soluciones para cada valor de λ . Teniendo el Prob. (7) dos condiciones de contorno, es posible que para valores excepcionales de λ posea soluciones no triviales. Como veremos en el capítulo siguiente, el Prob. (7) es un caso especial del problema

de Sturm-Liouville, y λ ha de ser un número real si el problema ha de tener una solución no trivial.

Si $\lambda = 0$, la ecuación diferencial del Prob. (7) se convierte en $X''(x) = 0$ y su solución general es $X = Ax + B$. Puesto que $B = 0$, si $X(0) = 0$, resulta $X(c) = Ac = 0$ solamente si $A = 0$; por tanto, este problema solo tiene la solución trivial $X(x) = 0$ cuando $\lambda = 0$.

Cuando $\lambda > 0$, la solución general de $X'' + \lambda X = 0$ es

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} x \sqrt{\lambda} + C_2 \operatorname{cos} x \sqrt{\lambda}.$$

Entonces $X(0) = 0$ si $C_2 = 0$ y $X(c) = 0$ si $\operatorname{sen} c \sqrt{\lambda} = 0$; es decir,

$$(9) \quad \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{c} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Entonces, aparte de un factor constante,

$$(10) \quad X = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Los números $\lambda = n^2\pi^2/c^2$ para los cuales el Prob. (7) posee soluciones no triviales se denominan *valores propios* o *autovalores* de aquel problema, y las funciones (10) son las *funciones propias* o *autofunciones* correspondientes.

En el caso de que $\lambda < 0$, pongamos $\lambda = -\mu^2$, donde μ es real. Entonces

$$X = C_3 \operatorname{sen} \mu x$$

es la solución de $X'' - \mu^2 X = 0$ que satisface la condición $X(0) = 0$. Al ser $\operatorname{senh} \mu c \neq 0$, $C_3 = 0$, si $X(c) = 0$. Así, pues, el Prob. (7) carece de autovalores negativos.

Cuando $\lambda = n^2\pi^2/c^2$, el Prob. (7) es un problema diferente para cada entero positivo n . Para un entero fijo n tiene la solución (10), y el Prob. (8) se convierte en

$$T''(t) + n^2\pi^2 a^2 c^{-2} T(t) = 0, \quad T'(0) = 0;$$

por consiguiente, aparte de un factor constante,

$$T = \cos \frac{n\pi at}{c}$$

Por tanto, todas las funciones de la sucesión infinita

$$(11) \quad Y_n(x,t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

satisfacen todas las condiciones homogéneas (1) y (2).

El procedimiento seguido muestra un método fundamental para obtención de soluciones particulares de condiciones homogéneas en problemas de contorno, el método de *separación de variables*.

Una combinación lineal de un número finito de las funciones (11) satisface también las condiciones homogéneas (Teorema 1). Pero cuando $t = 0$, se reduce a una combinación lineal de un número finito de las funciones $\text{sen}(n\pi x/c)$, y, por tanto, no satisfará la condición no-homogénea (3) excepto en el caso de que $f(x)$ tenga ese carácter especial.

Obsérvese que una suma de funciones del tipo $X(x)T(t)$ no es generalmente una función de este tipo. Por ejemplo, la suma $t^2 + xt$ no es de este tipo.

Según el Teorema 2, la función

$$(12) \quad y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c}$$

satisface también las condiciones (1) y (2), supuesto que los coeficientes b_n cumplan las condiciones apropiadas. Esta función satisfará la condición restante (3) si f puede ser representada en la forma

$$(13) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{c} \quad (0 \leq x \leq c).$$

En la sección siguiente indicaremos por qué los coeficientes b_n han de tener los valores

$$(14) \quad b_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{c} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

si ha de tener validez la representación (13).

La solución formal de nuestro problema de contorno relativa a los desplazamientos de la cuerda es la Fórm. (12), en la cual los coeficientes tienen los valores (14).

17. La serie de Fourier de senos. Recordemos que

$$2 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} = \cos \frac{(m-n)\pi x}{c} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{c},$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{c} = 1 - \cos \frac{2n\pi x}{c};$$

de donde se deduce que, cuando m y n son enteros,

$$(1) \quad \int_0^c \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ c & \text{si } m = n \\ 2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

La sucesión de funciones $\operatorname{sen} (n\pi x/c)$ ($n = 1, 2, \dots$) es, por tanto, *ortogonal* en el intervalo $0 < x < c$; esto es, la integral, extendida a lo largo de ese intervalo, del producto de dos funciones cualesquiera de la sucesión es nulo.

En la Sec. 16 tuvimos necesidad de determinar los coeficientes b_n de manera que una serie de aquellas funciones seno convergiera a una función dada $f(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq c$. Suponiendo que un tal desarrollo es posible, a saber,

$$(2) \quad f(x) = b_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{c} + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{c} + \dots + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} + \dots,$$

y que la serie puede integrarse término a término, después de haber sido multiplicada por $\operatorname{sen} (n\pi x/c)$, podemos utilizar la propiedad de ortogonalidad (1) para hallar una fórmula que dé b_n .

Multipiquemos todos los términos de la Ec. (2) por $\operatorname{sen} (n\pi x/c)$ e integremos de $x = 0$ a $x = c$. El primer término del segundo miembro se convierte en

$$b_1 \int_0^c \operatorname{sen} \frac{\pi x}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx.$$

Según la propiedad de la ortogonalidad, es cero a menos que $n = 1$. De manera semejante, todos los términos del segundo miembro, excepto el enésimo, se anulan. Teniendo presente la propiedad (1), resulta

$$\int_0^c f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx = b_n \int_0^c \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{c} dx = \frac{1}{2} cb_n.$$

De aquí se deduce que los coeficientes de la representación (2) tienen los valores

$$(3) \quad b_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La serie de senos (2) con los coeficientes (3) se llama *serie de Fourier de senos* correspondiente a la función f , en el intervalo $0 < x < c$. Empleando el símbolo tilde \sim para indicar correspondencia, podemos escribir

$$(4) \quad f(x) \sim \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \int_0^c f(\xi) \operatorname{sen} \frac{n\pi \xi}{c} d\xi \quad (0 < x < c).$$

En el Cap. 4 estableceremos las condiciones generales que ha de cumplir f para que la serie converja a los valores de $f(x)$ de modo que la correspondencia (4) se convierte en una igualdad.

18. Cuerda pulsada. Como caso especial del problema de contorno considerado en la Sec. 16, supongamos que la cuerda está estirada entre los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$ y que su punto medio está

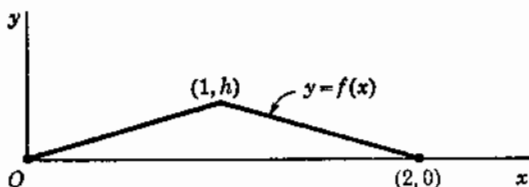


FIG. 6

elevado a una altura h encima del eje de las x . A partir del reposo en esta posición, se deja libre a la cuerda (Fig. 6).

En este caso la función f , que describe la posición inicial de la cuerda, está dada por la fórmula

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} hx & \text{cuando } 0 \leq x \leq 1, \\ -hx + 2h & \text{cuando } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Los coeficientes b_n de la serie de Fourier de senos correspondientes a esta función, en el intervalo $0 \leq x \leq 2$, pueden expresarse

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= h \int_0^1 x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} dx + h \int_1^2 (-x + 2) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} dx. \end{aligned}$$

Integrando y simplificando, resulta que

$$(2) \quad b_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

De acuerdo con nuestra solución formal (12), Sec. 16, se tiene:

$$(3) \quad y(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi at}{2}$$

Pero $\operatorname{sen} (n\pi/2) = 0$ cuando n es par. Cuando n es impar, podemos poner $n = 2m - 1$ donde $m = 1, 2, \dots$; entonces

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \operatorname{sen} \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi = -\cos m\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = (-1)^{m+1}$$

y la expresión (3) de los desplazamientos toma la forma

$$(4) \quad y(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi x}{2} \cos \frac{(2m-1)\pi at}{2}$$

La serie infinita de las expresiones (3) y (4) no es dos veces derivable con respecto a x o con respecto a t . Pero en la Sec. 56 mostraremos cómo puede representarse esta serie en una forma lo suficientemente sencilla, como para ver que la suma $y(x,t)$ de la serie es una solución del problema de contorno.

PROBLEMAS

1. Se indicó en la Sec. 12 que la ecuación diferencial homogénea $u_t = u_{xx}$ y las condiciones de contorno $u_x(0,t) = 0$, $u_x(1,t) = 0$ quedaban satisfechas por las siguientes funciones del tipo $T(t)X(x)$:

$$u_0 = 1, \quad u_n = \exp(-n^2\pi^2 t) \cos n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Empleese el método de separación de variables (Sec. 10) para deducir esa sucesión de soluciones particulares. Obsérvese que la solución $u_0 = 1$ corresponde al autovalor $\lambda = 0$ para el problema $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = X'(1) = 0$.

2. Emplear el método de separación de variables para obtener la sucesión de funciones $\exp[-(n - 1/2)^2\pi^2 t] \operatorname{sen} [(n - 1/2)\pi x]$ utilizada en el Prob. 2, Sec. 14.

3. En el Prob. 1, Sec. 14, se hizo notar que todas las funciones de la sucesión

$$u_n = y, \quad u_n = \cos n\pi x \operatorname{senh} n\pi y \quad (n = 1, 2, \dots)$$

satisfacen la ecuación de Laplace y las condiciones de contorno homogéneas

$$u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = u(x, 0) = 0.$$

Utilizar el método de separación de variables para deducir dicha sucesión.

4. Demostrar que la serie de Fourier de senos correspondientes a la función $f(x) = 3 \operatorname{sen} 4\pi x$ en el intervalo $(0 < x < 1)$, se reduce a $3 \operatorname{sen} 4\pi x$; es decir, a la propia función.

5. Demostrar que la serie de Fourier de senos correspondientes a la función $f(x) = 1$ en el intervalo $0 < x < \pi$ es

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \dots \right)$$

6. Escribir la serie de Fourier de senos correspondiente a la función $f(x) = x$ en el intervalo $0 < x < 1$.

$$\text{Solución } \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi x.$$

19. Ecuaciones diferenciales ordinarias. En la Sec. 16 encontramos que el problema de contorno homogéneo

$$(1) \quad X''(x) + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(c) = 0.$$

tiene una diversidad de soluciones $X = C_1 \operatorname{sen}(n\pi x/c)$, una para cada valor de C_1 en el caso de que el coeficiente λ tenga el valor $n^2\pi^2/c^2$, donde n es algún entero positivo. Cuando $\lambda \neq n^2\pi^2/c^2$, el problema tiene la solución única $X(x) = 0$. Este ejemplo ilustra el hecho de que la unicidad de soluciones en los problemas de contorno puede depender de los coeficientes de la ecuación diferencial y de la clase de condiciones de contorno y no solamente del orden de la ecuación y del número de condiciones de contorno. Esto es igualmente cierto en lo referente a la existencia de soluciones como veremos más abajo.

La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias asegura la existencia y unicidad de soluciones de ciertos tipos de *problemas de valores iniciales*, problemas en los que todos los datos de contorno están dados en un punto. Enunciaremos, sin demostración, un teorema relativo a ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Sean A , B y C funciones continuas de x en un intervalo $a \leq x \leq b$. Si x_0 es un punto fijo de ese intervalo e y_0 e y'_0 son unas constantes dadas, existe entonces una función y una sola y , continua y con derivada y' asimismo continua en aquel intervalo, que satisface la ecuación diferencial

$$(2) \quad y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = C(x) \quad (a < x < b)$$

y las dos condiciones iniciales

$$(3) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Las demostraciones de este teorema y de los análogos referentes a ecuaciones de otros órdenes, por medio de métodos de aproximaciones sucesivas, se encuentran en textos sobre la teoría de ecuaciones diferenciales¹. Según la Ec. (2) $y'' = C - Ay' - By$; por tanto, y'' es también continua. Que la ecuación tiene una solución general con dos constantes arbitrarias es consecuencia de que pueden asignarse valores arbitrarios a las constantes y_0 e y'_0 .

Por ejemplo, la ecuación

$$(4) \quad x''(t) + k^2x(t) = 0,$$

donde k es una constante diferente de cero, tiene una solución

$$(5) \quad x = C_1 \operatorname{sen} kt + C_2 \operatorname{cos} kt$$

siendo C_1 y C_2 dos constantes cualesquiera. En todo intervalo del eje de las t que contenga al punto $t = 0$ la función (5) es la solución de la Ec. (4) que satisface las condiciones $x(0) = C_2$ y $x'(0) = kC_1$.

Supongamos que x debe satisfacer las dos condiciones en los límites

$$(6) \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

al tiempo que la Ec. (4) y la exigencia de que x y x' sean continuas ($0 \leq t \leq 1$). Entonces, si $x(0) = 0$ es necesario que

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen} kt.$$

Si $x(1) = 1$, debe existir un valor de C_1 tal que

$$(7) \quad C_1 \operatorname{sen} k = 1.$$

Esta ecuación determina C_1 supuesto que $\operatorname{sen} k \neq 0$, resultando

$$(8) \quad x = \frac{\operatorname{sen} kt}{\operatorname{sen} k} \quad (k \neq \pm n\pi, n = 1, 2, \dots).$$

Pero cuando $k = \pm n\pi$, el problema de contorno de dos puntos que consiste en las Ecs. (4) y (6) no tiene solución porque no existe valor de C_1 , ó $x'(0)/k$, que satisfaga la Ec. (7).

¹ Ver página 73 del libro de Ince relacionado en la Bibliografía.

Es interesante considerar una interpretación física del caso $k = \pi$. Siendo $x'' = -\pi^2 x$, la función x representa el desplazamiento de la unidad de masa a lo largo del eje de las x sometida a una fuerza $-\pi^2 x$ proporcional al desplazamiento sufrido desde el origen $x = 0$. La masa está inicialmente en el origen; se requiere que se haya desplazado a $x = 1$ en el instante $t = 1$. Pero el número π es la frecuencia natural k de este sistema y en consecuencia la masa vuelve al origen en los instantes $t = 1, 2, \dots$, cualquiera que sea su velocidad inicial. Por tanto, $x(1) = 0$, y la condición $x(1) = 1$ no puede ser satisfecha.

20. Las soluciones generales de las ecuaciones en derivadas parciales. Algunos de los problemas de contorno en las ecuaciones en derivadas parciales pueden ser resueltos por un método correlativo del empleado para resolver problemas en ecuaciones diferenciales ordinarias, el método de utilizar una solución general de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1. Resolver el problema de contorno

$$(1) \quad u_{xx}(x, y) = 0, \quad u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = 1.$$

Por sucesivas integraciones de la ecuación $u_{xx} = 0$ con respecto a x , conservando y fijo, se obtienen las ecuaciones $u_x = f(y)$ y

$$(2) \quad u = xf(y) + g(y),$$

donde f y g son funciones arbitrarias. Las condiciones de contorno del Prob. (1) exigen que

$$g(y) = y^2, \quad f(y) + g(y) = 1;$$

de donde resulta $f(y) = 1 - y^2$ y la solución del problema es

$$(3) \quad u = x(1 - y^2) + y^2.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación de las ondas

$$(4) \quad y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t)$$

en el dominio $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, sujeta a las condiciones de contorno

$$(5) \quad y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty),$$

expresando la solución en función de la constante a y la función f .

La ecuación diferencial (4) puede simplificarse introduciendo las nuevas variables independientes r y s tales que

$$r = x + at, \quad s = x - at.$$

Según las reglas de diferenciación de las funciones compuestas

$$y_t = y_r r_t + y_s s_t = ay_r - ay_s.$$

Derivando de nuevo, se obtiene

$$y_{tt} = a^2(y_{rr} - 2y_{rs} + y_{ss}), \quad y_{xx} = y_{rr} + 2y_{rs} + y_{ss}.$$

La Ec. (4) queda, por tanto, reducida a la forma

$$y_{rs}(r, s) = 0$$

que puede resolverse por integraciones sucesivas para obtener $y_r = g'(r)$ y

$$y = g(r) + h(s),$$

donde g y h son funciones derivables arbitrarias.

Por consiguiente, una solución general de la ecuación de las ondas es

$$(6) \quad y = g(x + at) + h(x - at).$$

En este ejemplo las condiciones de contorno son lo suficientemente simples para permitirnos determinar las funciones g y h , porque la función (6) satisface las condiciones (5) cuando

$$g(x) + h(x) = f(x) \quad \text{y} \quad ag'(x) - ah'(x) = 0.$$

O sea, $g(x) - h(x) = c$, constante, y $2h + c = f$; esto es, $2h = f - c$ y $2g = f + c$, de modo que

$$(7) \quad y = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)].$$

La solución (7) del problema de contorno consistente en las Ecs. (4) y (5) se comprueba fácilmente, suponiendo que $f'(x)$ y $f''(x)$ existen para todo valor de x .

El método ilustrado en los dos ejemplos anteriores tiene severas limitaciones. Las soluciones generales (2) y (6) que contienen funciones arbitrarias, fueron obtenidas por integraciones sucesivas, procedimiento aplicable a relativamente pocos tipos de ecuaciones en derivadas parciales. Pero aun en los casos excepcionales en los que pue-

den hallarse tales soluciones generales, la determinación de las funciones arbitrarias partiendo directamente de las condiciones de contorno es con frecuencia demasiado difícil.

21. Superposición. Otros métodos. Hemos puesto de relieve un procedimiento para resolución de problemas de contorno lineales en ecuaciones en derivadas parciales, basado en la superposición. Este procedimiento, ilustrado en la Sec. 16, consiste en encontrar primeramente soluciones particulares de todas las condiciones homogéneas del problema por el método de separación de variables. A continuación se busca una combinación lineal generalizada, o superposición, de aquellas soluciones, tal que satisfaga también las condiciones no-homogéneas.

Este método de *separación de variables y superposición*, a veces llamado *método de Fourier*, es un procedimiento a la vez clásico y poderoso. El estudio de su teoría y aplicaciones es el objeto de este libro. También se indicarán sus limitaciones.

Existen otros métodos importantes de resolución de problemas de contorno lineales. Los procedimientos que utilizan transformaciones de Laplace, las transformaciones de Fourier, u otras transformaciones integrales, incluidas todas ellas en el cálculo operativo, son especialmente eficaces¹. El método clásico de las representaciones conformes de la teoría de funciones de variable compleja se aplica a una clase importante de problemas que contienen la ecuación de Laplace en dos dimensiones². Hay, además, otros caminos para reducir o resolver esos problemas, incluyendo aplicaciones de las funciones de Green y métodos de cálculo numérico, o empleo de máquinas calculadoras. Aun en el caso de que un problema se preste a ser atacado por más de un método, ocurre que diferentes métodos producen a veces formas diferentes de las soluciones, y cada forma puede tener sus propias características convenientes. Por otra parte, algunos problemas requieren aplicaciones sucesivas de dos o más métodos. Otros, incluyendo algunos problemas lineales de tipos bastante sencillos, han desafiado todos los métodos exactos conocidos. El desarrollo de nuevos métodos es un trabajo de la investigación matemática contemporánea.

PROBLEMAS

Utilizar soluciones generales de las ecuaciones en derivadas parciales para resolver los problemas de contorno de los Probs. 1 a 4.

1. $u_{xx}(x,y) = 6xy$, $u(0,y) = y$, $u_x(1,y) = 0$.

Solución. $u = (x^3 - 3x + 1)y$

¹ Ver la obra del autor «Operational Mathematic» relacionada en la Bibliografía.

² Churchill, R. V., «Complex Variables and Applications», 2.^a ed., 1960.

$$2. u_{xy}(x, y) = 2x, u(0, y) = 0, u(x, 0) = x^2.$$

$$\text{Solución. } u = x^2(1 + y)$$

$$3. y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t), y(x, 0) = 0, y_t(x, 0) = (1 + x^2)^{-1}.$$

$$\text{Solución. } 2ay = \arctan(x + at) - \arctan(x - at).$$

$$4. y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t), y(x, 0) = 0, y_t(x, 0) = g(x).$$

$$\text{Solución. } y = (2a)^{-1} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi.$$

5. Emplear la superposición de la solución (7). Sec. 20, y la solución del Prob. 4 para escribir la solución

$$y = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi$$

del problema de contorno

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t), \quad y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = g(x).$$

6. En el Ej. 2 de la Sec. 20, $y(x, t)$ representa desplazamientos transversales de una cuerda tensa de longitud infinita, que en el momento inicial y partiendo de la posición $y = f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) se deja libre. Utilizando la solución $y = \frac{1}{2}f(x + at) + \frac{1}{2}f(x - at)$ demostrar que la posición instantánea de la cuerda en el momento t puede describirse como la curva obtenida sumando las ordenadas de dos curvas, una obtenida por traslación de la curva $y = \frac{1}{2}f(x)$ hacia la izquierda en una longitud at , la otra por una traslación hacia la derecha de la misma curva y en la misma longitud. Al variar t , la curva $y = \frac{1}{2}f(x)$ se mueve como una onda con la velocidad a . Mostrar gráficamente algunas posiciones instantáneas de la cuerda cuando $f(x)$ es cero excepto en un pequeño contorno del origen.

7. Deducir la solución general

$$u = x + e^{-y}g(x) + h(y)$$

de la ecuación en derivadas parciales $u_{xy} + u_x = 1$.

8. El problema de contorno

$$\begin{aligned} y_{tt}(x, t) &= a^2 y_{xx}(x, t) & (x > 0, t > 0), \\ y(x, 0) &= e^{-x}, \quad y_t(x, 0) = 0 & (x > 0), \\ y_x(0, t) &= y(0, t), \quad \lim_{v \rightarrow \infty} y(x, t) = 0 & (t > 0) \end{aligned}$$

puede ser resuelto con la ayuda de transformaciones de Laplace elementales. Su solución está dada por la expresión

$$y = \begin{cases} e^{-x} \cosh at & \text{cuando } x \geq at. \\ e^{-x} \cosh at + \sinh(x - at) + (x - at) \exp(x - at) & \text{cuando } x \leq at. \end{cases}$$

Demostrar que esta fórmula es un caso especial de la solución general (6), Sec. 20, y basándose en ello, que y satisface la ecuación de las ondas en el dominio $x > 0, y > 0$, excepto en los puntos de la recta $x = at$ donde no existen las derivadas de y . Obsérvese que cuando $t = 0$ y $x > 0$, resulta aquí $y = e^{-x}$

puesto que $x > at$. Demostrar que y satisface el resto de las condiciones de contorno.

[Observación: Aunque la solución general de la ecuación en derivadas parciales se conoce en este caso, este sencillo problema de contorno no se adapta bien al método (Sec. 20) de empleo de la solución general].

22. Desarrollo histórico. Las ciencias matemáticas experimentaron un gran incremento de actividad como consecuencia de la invención del cálculo infinitesimal por Newton (1642-1727) y Leibnitz (1646-1716). Entre los temas de la física matemática que atrajeron la atención de los grandes científicos durante aquel período, se encontraron los problemas de contorno en las vibraciones de cuerdas estiradas entre dos puntos fijos y en las de barras o columnas de aire, asociadas con teorías matemáticas de vibraciones musicales. Entre los primeros que contribuyeron a la teoría de cuerdas vibrantes, se incluyen al matemático inglés Brook Taylor (1685-1731), a los matemáticos suizos Daniel Bernoulli (1700-1782) y L. Euler (1707-1783), y d'Alembert (francés, 1717-1783).

En la década de los años 1750, d'Alembert, Bernoulli y Euler habían desarrollado la teoría de las cuerdas vibrantes hasta el punto en que la ecuación en derivadas parciales $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ era conocida, y se había encontrado una solución del problema de contorno partiendo de la solución general de aquella ecuación. Además, el concepto de los modos de vibración fundamentales condujo a aquellos matemáticos a las nociones de superposición de soluciones, y a una solución de la forma (12) en la Sec. 16 como serie de funciones trigonométricas, y de aquí al problema de representar una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica. Más tarde, Euler dio las fórmulas para los coeficientes de las series. Pero como todavía no estaba aclarado el concepto de función, tuvo lugar una larga controversia sobre la cuestión de la representación de funciones arbitrarias en un intervalo finito por medio de series de funciones seno. Este problema de representación fue resuelto por vez primera por Dirichlet unos setenta años más tarde.

El físico matemático francés J. B. Fourier (1768-1830) presentó muchos ejemplos instructivos de desarrollos en series trigonométricas en relación con problemas de contorno en la conducción del calor. Su libro *Théorie analytique de la chaleur*, publicado en 1822, es un clásico de la teoría de conducción del calor. Mostró de forma clara los procedimientos básicos de separación de variables y de superposición, y su trabajo hizo mucho por despertar interés sobre las representaciones por medio de series trigonométricas.

Pero las contribuciones de Fourier al problema de representación no incluyeron condiciones de validez de la representación; estaba interesado en aplicaciones y métodos. El matemático alemán P. G.

Lejeune Dirichlet (1805-1859) fue el primero en dar esas condiciones. Fue en 1829 cuando Dirichlet estableció firmemente las condiciones generales que debe cumplir una función, suficientes para que se pueda asegurar la convergencia de su serie de Fourier a los valores de la función ¹.

La teoría de representación ha sido perfeccionada y extendida en amplio grado desde los tiempos de Dirichlet. Todavía sigue desarrollándose.

¹ Para información suplementaria sobre la historia de las series de Fourier ver los artículos de R. E. Langer y E.B. Van Vleck relacionados en la Bibliografía.

SUCESIONES ORTOGONALES DE FUNCIONES

23. El producto interior de dos vectores. El concepto de sistema ortogonal de funciones es una generalización natural del concepto de sistema ortogonal de vectores; esto es, de un sistema de vectores mutuamente perpendiculares. De hecho, una función puede considerarse como un vector generalizado, y por ello las propiedades de un sistema de vectores sugieren las propiedades análogas de un sistema de funciones. En la discusión sobre vectores que sigue, se emplearán la terminología y notación que se aplican al caso general cuando ello parezca conveniente para posteriores generalizaciones.

Sea g ó $g(r)$ un vector en el espacio tridimensional ordinario cuyos componentes rectangulares son los tres números $g(1)$, $g(2)$ y $g(3)$. Es el radio vector del punto que tiene estos tres números como coordenadas cartesianas rectangulares. La longitud de este vector, llamada su *norma*, la designaremos por $\|g\|$; es un número no-negativo tal que

$$(1) \quad \|g\|^2 = [g(1)]^2 + [g(2)]^2 + [g(3)]^2 = \sum_{r=1}^3 [g(r)]^2.$$

Si $\|g\| = 1$, g es un vector unidad, llamado también vector *normal* o *normalizado*. Si $\|g\| = 0$, entonces cada uno de sus componentes es cero y g es conocido como *vector cero*.

La combinación lineal $c_1g_1 + c_2g_2$ de dos vectores g_1 y g_2 , donde c_1 y c_2 son números, es el vector cuyas componentes son los tres números $c_1g_1(r) + c_2g_2(r)$, $r = 1, 2, 3$; y análogamente para tres o más vectores. La suma y resta de vectores y su multiplicación por un número son combinaciones lineales. Observemos en particular que la norma del vector $g_1 - g_2$,

$$(2) \quad \|g_1 - g_2\| = \left\{ \sum_{r=1}^3 [g_1(r) - g_2(r)]^2 \right\}^{1/2},$$

es la distancia entre los extremos de los vectores g_1 y g_2 .

El producto escalar o *producto interior*, de g_1 y g_2 se designa con el símbolo (g_1, g_2) ; así

$$(3) \quad (g_1, g_2) = \sum_{r=1}^3 g_1(r)g_2(r) = \|g_1\| \|g_2\| \cos \theta,$$

en donde θ es el ángulo formado por los dos vectores que está definido cuando ninguno de los dos es el vector cero. Cuando $\|g_2\| = 1$, entonces (g_1, g_2) es la proyección de g_1 sobre la dirección de g_2 . La condición para que dos vectores no-cero sean ortogonales, es decir, el uno perpendicular al otro, puede escribirse

$$(4) \quad (g_1, g_2) = 0, \quad \text{y} \quad \sum_{r=1}^3 g_1(r)g_2(r) = 0.$$

Teniendo presentes las Ecs. (1) y (3), las norma de g puede expresarse

$$(5) \quad \|g\| = (g, g)^{1/2}.$$

24. Sistemas ortogonales de vectores. Dado un sistema ortogonal de tres vectores no-cero g_n ($n = 1, 2, 3$), puede formarse un sistema de vectores unidad ϕ_n que tengan las mismas direcciones, dividiendo cada vector g_n por su longitud. Los componentes de ϕ_1 , por ejemplo, son $\phi_1(r) = \|g_1\|^{-1}g_1(r)$ ($r = 1, 2, 3$). Este sistema de vectores unitarios mutuamente perpendiculares ϕ_n se llama *sistema ortonormal*; Tal sistema puede describirse por medio de productos interiores poniendo

$$(1) \quad (\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, 3),$$

donde δ_{mn} es la δ de Kronecker

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

La condición (1) expresa, por tanto, que cada uno de los vectores del sistema ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 es perpendicular a los otros dos y que todos tienen por longitud la unidad.

Se empleará el símbolo $\{\phi_n\}$ para representar estos sistemas ortonormales. Un ejemplo sencillo lo da el sistema formado por los vectores unidad a lo largo de los tres ejes coordenados.

Todo vector f en el espacio puede expresarse como combinación

lineal de los vectores ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Es decir, se pueden encontrar tres números c_1, c_2 y c_3 para los cuales se verifica

$$(2) \quad f(r) = c_1\phi_1(r) + c_2\phi_2(r) + c_3\phi_3(r) \quad (r = 1, 2, 3),$$

cuando se den los componentes $f(1), f(2)$ y $f(3)$. Para hallar fácilmente el número c_1 , considérese (2) como una ecuación vectorial y efectúese el producto interior de ambos miembros por ϕ_1 . Se obtiene

$$(f, \phi_1) = c_1(\phi_1, \phi_1) + c_2(\phi_2, \phi_1) + c_3(\phi_3, \phi_1) = c_1$$

puesto que $(\phi_1, \phi_2) = 1$ y $(\phi_2, \phi_1) = (\phi_3, \phi_1) = 0$, según la condición (1). De manera semejante se encuentran c_2 y c_3 , efectuando el producto interior de los miembros de la Ec. (2) por ϕ_2 y ϕ_3 , respectivamente. Los coeficientes, por tanto, son

$$(3) \quad c_n = (f, \phi_n) = \sum_{r=1}^3 f(r)\phi_n(r) \quad (n = 1, 2, 3);$$

c_n es la proyección de f sobre ϕ_n . La representación (2) puede entonces escribirse

$$(4) \quad f(r) = (f, \phi_1)\phi_1(r) + (f, \phi_2)\phi_2(r) + (f, \phi_3)\phi_3(r) \\ = \sum_{n=1}^3 (f, \phi_n)\phi_n(r).$$

La representación (2), o la (4), pueden llamarse desarrollo de un vector arbitrario f en serie finita de los vectores ortonormales de referencia. Estos vectores ortogonales de referencia se han supuesto normalizados únicamente para conseguir una mayor simplicidad en las fórmulas (3) de los coeficientes del desarrollo.

Las definiciones y resultados anteriores pueden extenderse inmediatamente a vectores en un espacio de K dimensiones. En este caso, el índice r , que indica el componente, toma los valores de 1 a K en lugar de 1 a 3. La definición de producto interior de dos vectores g_1 y g_2 se convierte en este espacio en

$$(5) \quad (g_1 g_2) = \sum_{r=1}^k g_1(r)g_2(r).$$

Es también posible una generalización de otra clase. Las unidades de longitud en los ejes coordenados rectangulares, con respecto a las

cuales se miden los componentes de los vectores pueden variar de un eje a otro. En tal caso el producto escalar de dos vectores g_1 y g_2 en un espacio tridimensional tiene la forma

$$(g_1, g_2) = \sum_{r=1}^3 p(r)g_1(r)g_2(r).$$

Los números peso $p(1)$, $p(2)$ y $p(3)$ dependen aquí de las unidades de longitud usados a lo largo de los tres ejes.

25. Funciones como vectores. Ortogonalidad. Un vector $g(r)$ en tres dimensiones ha quedado determinado anteriormente por los números $g(1)$, $g(2)$ y $g(3)$. Cualquier función $g(r)$ que tenga valores reales cuando $r = 1, 2, 3$, representará un vector si se acuerda que estos valores sean los componentes del vector. Esta función puede no estar definida para ningún otro valor de r ; en este caso, su gráfica consistirá únicamente en tres puntos.

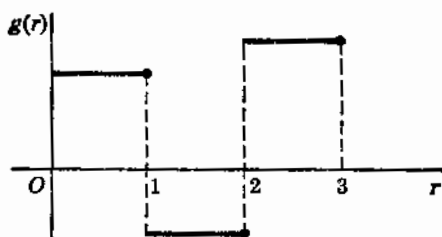


FIG. 7

Supóngase que $g(r)$, definida cuando $r = 1, 2, 3$, lo está también para otros valores de r de modo que represente la siguiente función escalón (Fig. 7):

$$(1) \quad g(r) = \begin{cases} g(1) & \text{cuando } 0 < r \leq 1, \\ g(2) & \text{cuando } 1 < r \leq 2, \\ g(3) & \text{cuando } 2 < r \leq 3. \end{cases}$$

Entonces, $[g(1)]^2$ representa el área rectangular bajo la gráfica de $[g(r)]^2$ desde $r = 0$ hasta $r = 1$, y análogamente para $[g(2)]^2$ y $[g(3)]^2$; en este caso la fórmula (1), Sec. 23, para el cuadrado de la norma puede escribirse

$$\|g\|^2 = \int_0^3 [g(r)]^2 dr.$$

Si g_1 y g_2 son dos funciones escalón del tipo indicado, entonces

$$(g_1, g_2) = \int_0^3 g_1(r)g_2(r) dr.$$

La función $g(r)$ representará un vector en un espacio de k dimensiones si toma valores reales cuando $r = 1, 2, \dots, k$ y estos valores son considerados como los componentes del vector.

Sea ahora $g(x)$ una función definida para todos los valores de x del intervalo $a \leq x \leq b$. Si consideramos una función como un vector, sus componentes deben consistir en todas las ordenadas de su gráfica, una para cada valor de x en el intervalo. Ahora no resultará posible sumar con respecto a x como lo hacíamos con respecto al índice r . El proceso natural es sumar por integración.

La *norma* de la función $g(x)$, longitud de este vector generalizado, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes y se define como el número no-negativo

$$(2) \quad \|g\| = \left\{ \int_a^b [g(x)]^2 dx \right\}^{1/2}.$$

El *producto interior* de dos funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ es el número definido por la ecuación

$$(3) \quad (g_1, g_2) = \int_a^b g_1(x)g_2(x)dx,$$

en analogía con la Ec. (5), Sec. 24. La condición de que las dos funciones sean *ortogonales* se expresa

$$(g_1, g_2) = 0;$$

esto es,

$$(4) \quad \int_a^b g_1(x)g_2(x) dx = 0.$$

Como anteriormente, la definición (2) puede escribirse $\|g\| = (g, g)^{1/2}$.

Hemos llevado nuestra generalización de los vectores demasiado lejos para que podamos conservar el significado original de la terminología geométrica. La norma de una función g no tiene otra interpretación como longitud asociada con g que la de ser la raíz cuadrada del área bajo la gráfica de $[g(x)]^2$. La ortogonalidad de dos funciones g_1 y g_2 no tiene ningún significado en cuanto a perpendicu-

laridad; quiere decir solamente que el producto $g_1 g_2$ toma valores positivos y negativos en el intervalo de modo que queda satisfecha la Ec. (4). La distancia generalizada entre dos funciones g_1 y g_2 ,

$$(5) \quad \|g_1 - g_2\| = \left\{ \int_a^b [g_1(x) - g_2(x)]^2 dx \right\}^{1/2},$$

es una medida de la distancia media entre sus gráficas.

Una sucesión de funciones $\{g_n(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) es ortogonal en el intervalo (a, b) si $(g_m, g_n) = 0$ cuando $m \neq n$ ($m = 1, 2, \dots$). Si ninguna de las funciones g_n tiene norma cero, cada función g_n puede normalizarse sin más que dividirla por la constante positiva $\|g_n\|$. La nueva sucesión $\{\phi_n(x)\}$ así formada, donde

$$(6) \quad \phi_n(x) = \|g_n\|^{-1} g_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

es normal y ortogonal, abreviadamente *ortonormal*, en el intervalo; esto es,

$$(7) \quad (\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

donde δ_{mn} es la δ de Kronecker (Sec. 24). Escrita de forma más explícita, la condición (7) para que una sucesión sea ortonormal se convierte en

$$(8) \quad \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

El intervalo (a, b) en el que están definidas las funciones y sus productos interiores se llama *intervalo fundamental*. En la sección siguiente se indicarán las condiciones que han de cumplir las funciones para que existan las integrales que representan sus productos interiores.

En la Sec. 17 se citó un ejemplo de una sucesión ortogonal de funciones, donde se hizo notar que la sucesión

$$(9) \quad \left\{ \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

es ortogonal en el intervalo $(0, c)$. Todas las funciones de esta sucesión tienen la norma $\sqrt{c/2}$ común y, por tanto, la sucesión ortonormal es

$$(10) \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{c}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \right\} \quad (0 \leq x \leq c, n = 1, 2, \dots).$$

La sucesión (9) es también ortogonal en el intervalo $(-c, c)$; en este caso, el factor de normalización es $c^{-1/2}$.

26. Funciones casi-continuas. Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo finito $a \leq x \leq b$ excepto acaso en un número finito de puntos aislados a, x_1, \dots, x_n, b , donde $a < x_1 < \dots < x_n < b$. Entonces, f es continua en cada uno de los intervalos abiertos $a < x < x_1, x_1 < x < x_2, \dots, x_n < x < b$; no está definida necesariamente en los extremos de los intervalos parciales. Pero si en cada uno de éstos f tiene límites finitos cuando x se aproxima a los extremos desde el interior, entonces la función f es *casi-continua* en el intervalo (a, b) .

Obsérvese que se exige la existencia de los límites $f(a+0), f(x_1-0), f(x_1+0), \dots, f(b-0)$, donde tales límites a la derecha y a la izquierda de un punto x_0 se definen como sigue: $\epsilon > 0$ y

$$(1) \quad f(x_0+0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \epsilon), \quad f(x_0-0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x_0 - \epsilon).$$

Las funciones continuas son casos particulares de las funciones casi-continuas. La función escalón (1), Sec. 25, ilustrada en la Fig. 7, es un ejemplo de función casi-continua $g(r)$ que no es continua en el intervalo $0 \leq r \leq 3$.

La integral de una función casi-continua existe. Es la suma de las integrales extendidas a lo largo de los subintervalos:

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f dx + \int_{x_1}^{x_2} f dx + \dots + \int_{x_n}^b f dx.$$

La primera integral del segundo miembro existe porque es la integral de una función continua, en el intervalo $a \leq x \leq x_1$, con la única condición de asignar los valores $f(a+0)$ y $f(x_1-0)$ a $f(a)$ y $f(x_1)$, respectivamente. Análogamente, las demás integrales existen como integrales de funciones continuas.

Si dos funciones f_1 y f_2 son casi-continuas en un intervalo (a, b) , existe una subdivisión del intervalo tal que ambas funciones son continuas en cada uno de los intervalos parciales, cuando se da a las funciones en los dos extremos de cada uno de éstos los valores límites que toman al aproximarse a ellos desde el interior. En consecuencia, la combinación lineal $c_1 f_1 + c_2 f_2$, o el producto $f_1 f_2$, tiene esa continuidad en cada uno de los intervalos parciales y, por tanto, son casi-continuas en (a, b) . Por consiguiente, las integrales en ese intervalo de las funciones $c_1 f_1 + c_2 f_2, f_1 f_2$ y $[f_1(x)]^2$ existen. Los límites unidireccionales de esas funciones existen también como combinaciones correspondientes de los límites unidireccionales de f_1 y f_2 .

Excepto cuando se diga otra cosa, en este libro *limitaremos nuestra atención a las funciones casi-continuas* en todos los intervalos finitos que se consideren.

El conjunto de todas las funciones de esa clase para un intervalo determinado (a, b) constituye el *espacio funcional* de funciones casi-continuas. Corresponde al espacio vectorial tridimensional representado por todas las funciones $g(r)$ que están definidas cuando $r = 1, 2, 3$. Hemos demostrado en lo que antecede que las integrales empleadas en la Sec. 25 para definir las normas, los productos interiores y la distancia generalizada, existen para todas las funciones del espacio de funciones casi-continuas.

En la teoría de sucesiones ortogonales de funciones pueden utilizarse otros espacios funcionales. El subespacio consistente en todas las funciones continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$ es más simple, pero más restringido que el espacio de funciones casi-continuas. El espacio de todas las funciones integrables cuyos productos incluyendo cuadrados $[f(x)]^2$ también son integrables, se emplean en la teoría general de análisis funcional. Nuestro caso particular lleva consigo conceptos más elementales del análisis matemático.

PROBLEMAS

1. Demostrar que la sucesión de funciones $\{\cos nx\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) es ortogonal en el intervalo $(0, \pi)$ y que la sucesión ortonormal correspondiente consiste en las funciones $1/\sqrt{\pi}$ y $\sqrt{2/\pi} \cos nx$ ($n = 1, 2, \dots$).

2. Demostrar que las funciones $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, 1, \cos x, \cos 2x, \dots$ constituyen una sucesión ortogonal en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Normalizar la sucesión.

3. Demostrar que las funciones $f_1(x) = 1$, y $f_2(x) = x$ son ortogonales en el intervalo $(-1, 1)$, y determinar las constantes A y B de modo que la función $f_3(x) = 1 + Ax + Bx^2$ sea ortogonal a las f_1 y f_2 en aquel intervalo.

Solución $A = 0, B = -3$.

4. Dos funciones continuas $f(x)$ y $g_1(x)$ son linealmente independientes en un intervalo (a, b) ; esto es, una no es el producto de una constante por la otra. Determinar la combinación lineal $f + Ag_1$ de aquellas funciones que sea ortogonal a g_1 , obteniendo así el par ortogonal g_1, g_2 en el intervalo, donde

$$g_2(x) = f(x) - \frac{(f, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1(x).$$

Explicar además la interpretación geométrica de esta fórmula para g_2 en el caso de que f_1, g_1 y g_2 representen vectores ($x = 1, 2, 3$).

5. Una función continua en un intervalo cerrado, está acotada; es decir, existe un número M tal que $|f(x)| < M$ para todos los puntos x del intervalo. Empleese esta propiedad para explicar por qué una función casi-continua está acotada para todos los puntos de su intervalo en los que la función está definida.

6. Para la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, (a) explicar por qué f no es casi continua en

el intervalo $(0, 1)$; además, (b) demostrar que $\int_0^1 f dx$ existe como integral impropia pero que $[f(x)]^2$ no es integrable en el intervalo $(0, 1)$.

7. Si $f(x) = 0$, excepto en un número finito de puntos de un intervalo $a \leq x \leq b$, explicar por qué es una función casi-continua con norma cero, $\|f\| = 0$ en aquel intervalo.

8. Supuesto demostrado que la integral de una función continua no-negativa tiene un valor positivo, si la función tiene un valor positivo en algún punto del intervalo de integración, demostrar que si una función f es casi-continua y $\|f\| = 0$ en un intervalo (a, b) , se verifica que $f(x) = 0$ en todos los puntos x del intervalo con la posible excepción de un número finito de ellos.

27. Series de Fourier generalizadas. Dada una sucesión ortonormal de funciones $\{\phi_n(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) en un intervalo (a, b) , puede que resulte posible representar una función f dado arbitrariamente en aquel intervalo por medio de una combinación lineal de aquellas funciones generalizada a una serie infinita:

$$(1) \quad f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_n\phi_n(x) + \dots \quad (a < x < b).$$

Esta representación corresponde a la (2), Sec. 24, de un vector del espacio tridimensional en términos de los tres vectores de un sistema ortonormal. Observemos que la correspondencia tiene sus limitaciones. En la Sec. 24 el número de vectores $\phi_n(r)$ ($n = 1, 2, 3$) en el sistema de referencia ortonormal es el mismo que el número de componentes de un vector $f(r)$ ($r = 1, 2, 3$). Sin embargo, el número de funciones $\phi_n(x)$ en la sucesión ortonormal anterior es infinitamente numerable; esto es, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre aquellas funciones y el conjunto de todos los números enteros positivos; más aún, cada función $f(x)$ ó $\phi_n(x)$ tiene tantos componentes como puntos hay en el intervalo (a, b) , una infinidad no numerable de componentes.

En el caso de que la serie de la Ec. (1) converja hacia $f(x)$, y si, después de multiplicar todos los términos de (1) por $\phi_n(x)$, la serie que resulta en el segundo miembro es integrable, podremos obtener los coeficientes c_n como productos interiores siguiendo el procedimiento utilizado con los vectores. Después de multiplicar por $\phi_n(x)$ e integrar entre a y b , se tiene

$$(f, \phi_n) = c_1(\phi_1, \phi_n) + c_2(\phi_2, \phi_n) + \dots + c_n(\phi_n, \phi_n) + \dots$$

Como $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$, se deduce que

$$(2) \quad (f, \phi_n) = c_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Los números c_n se denominan *coeficientes de Fourier* de f respecto a la sucesión ortonormal $\{\phi_n\}$; pueden expresarse

$$(3) \quad c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La serie de la Ec. (1) con estos coeficientes es la *serie de Fourier generalizada* correspondiente a la función f , y se escribe

$$(4) \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \int_a^b f(\xi)\phi_n(\xi) d\xi.$$

La correspondencia (4) entre $f(x)$ y su serie no siempre será una igualdad como puede preverse considerando el caso de vectores en el espacio tridimensional. En este caso, si el sistema ortonormal está compuesto únicamente de dos vectores $\phi_1(r)$ y $\phi_2(r)$ cualquier vector que no pertenezca al plano determinado por ellos, no podrá ser representado en la forma $c_1\phi_1(r) + c_2\phi_2(r)$. Aquí, el sistema de referencia no es completo en el sentido de que en el espacio tridimensional hay un vector que es perpendicular a ϕ_1 y ϕ_2 . Análogamente, en la correspondencia (4), en caso de que f sea ortogonal a todos los términos ϕ_n de la serie ortonormal de funciones y $\|f\| \neq 0$, entonces todos los términos de la serie son cero, y así la serie no representa a $f(x)$.

Un sistema ortonormal $\{\phi_n(x)\}$ es *completo* si en el espacio funcional que se considere no existe ninguna función, con norma positiva, que sea ortogonal a todas las funciones ϕ_n . Antes hemos hecho observar que el sistema o sucesión debe ser necesariamente completo si la correspondencia (4) ha de ser una igualdad para todas las funciones f del espacio.

28. Aproximación cuadrática. Una combinación lineal

$$K(r) = \gamma_1\phi_1(r) + \gamma_2\phi_2(r) \quad (r = 1, 2, 3)$$

de dos de los vectores de un sistema ortonormal $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ es un vector situado en el plano de ϕ_1 y ϕ_2 . Para hacer que K sea la aproximación óptima a un vector $f(r)$ en el espacio tridimensional, en el sentido de que la distancia $d = \|f - K\|$ entre los extremos de f y K sea la más corta posible, podemos ver geoméricamente que K debe ser la proyección de f sobre el plano de ϕ_1 y ϕ_2 (Fig. 8). Por consiguiente, $\gamma_1 = (f, \phi_1) = c_1$, proyección de f sobre ϕ_1 , y $\gamma_2 = (f, \phi_2) = c_2$. De manera análoga, vemos que los coeficientes $c_n(f, \phi_n)$ son aquellos para los cuales una combinación lineal de uno, o dos, o tres, de los vectores ϕ_n resulta la aproximación óptima a f .

Se puede decir que hay una analogía con lo anterior cuando se trata de los coeficientes de Fourier c_n de una función $f(x)$. Consideremos funciones en el espacio de funciones casi continuas en un intervalo (a, b) ; sean $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$, m funciones de una sucesión

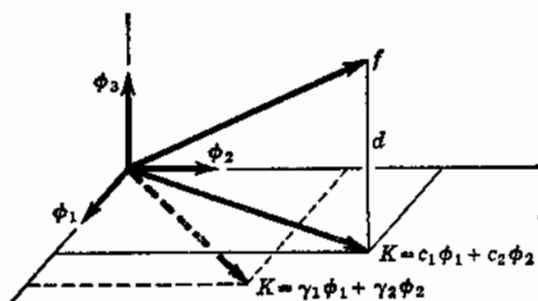


FIG. 8

ortonormal $\{\phi_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) en dicho intervalo y K_m una combinación lineal de las mismas.

$$(1) \quad K_m(x) = \gamma_1 \phi_1(x) + \gamma_2 \phi_2(x) + \dots + \gamma_m \phi_m(x).$$

Determinaremos las constantes γ_n de modo que K_m sea la *aproximación cuadrática óptima* a una función dada f en el sentido de que el valor de la integral E ,

$$(2) \quad E = \int_a^b f(x) - K_m(x) \, dx,$$

que puede considerarse una medida del error, sea lo más pequeña posible. Esta es una aproximación a $f(x)$ por *mínimos cuadrados*. Obsérvese que E es el cuadrado de la distancia generalizada $\|f - K_m\|$ entre las funciones f y K_m .

Sean c_n los coeficientes de Fourier de f , $c_n = (f, \phi_n)$; entonces

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b [f(x) - \gamma_1 \phi_1(x) - \gamma_2 \phi_2(x) - \dots - \gamma_m \phi_m(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [f(x)]^2 dx + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_m^2 \\ &\quad - 2\gamma_1 c_1 - 2\gamma_2 c_2 - \dots - 2\gamma_m c_m. \end{aligned}$$

Sumando y restando $c_1^2, c_2^2, \dots, c_m^2$ para completar los cuadrados del segundo miembro, se tiene

$$(3) \quad E = \int_a^b [f(x)]^2 dx - c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_m^2 + (\gamma_1 - c_1)^2 \\ + (\gamma_2 - c_2)^2 + \dots + (\gamma_m - c_m)^2.$$

Según se observa claramente en la Ec. (2), $E \geq 0$; por consiguiente, se deduce de la Ec. (3) que E tiene su valor mínimo cuando $\gamma_1 = c_1, \gamma_2 = c_2, \dots, \gamma_m = c_m$. Este resultado puede enunciarse como sigue:

Teorema 1. *Los coeficientes de Fourier de una función f con respecto a las funciones $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ de un sistema ortonormal son aquellos para los cuales una combinación lineal de las m funciones resulta la aproximación cuadrática óptima a $f(x)$ en el intervalo fundamental.*

Poniendo $\gamma_n = c_n$ en la Ec. (3), y puesto que $E \geq 0$, resulta

$$(4) \quad c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx = \|f\|^2;$$

expresión conocida como *desigualdades de Bessel*. El número de la derecha es independiente de m , y, por tanto, al ir aumentando m , la suma de la izquierda es una sucesión acotada no-decreciente. Por consiguiente, la sucesión infinita converge hacia un límite no mayor que $\|f\|^2$; esto es, la serie infinita de los cuadrados de los coeficientes de Fourier de cualquier función f del espacio que consideramos converge, y

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

La convergencia de esta serie implica que el término general tiende a cero al tender n hacia infinito. Por consiguiente, *los coeficientes de Fourier se aproximan siempre a cero cuando $n \rightarrow \infty$.*

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (f, \phi_n) = 0.$$

29. Sistemas cerrados y completos. Designemos por $S_m(x)$ la suma parcial de la serie de Fourier generalizada que corresponde a f :

$$(1) \quad S_m(x) = \sum_{n=1}^m c_n \phi_n(x).$$

que es la combinación lineal $K_m(x)$ de la Sec. 28 cuando $\gamma_n = c_n$.

Se dice que la suma S_m converge en media o también que converge cuadráticamente a f sobre el intervalo fundamental, si

$$(2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - S_m(x)]^2 dx = 0.$$

La condición (2) puede también expresarse

$$\text{l.e.m. } S_m(x) = f(x),$$

donde la abreviatura l.e.m. significa *límite en medio*.

Si la condición (2) es satisfecha por cualquier función f en nuestro espacio funcional, diremos que el sistema ortonormal $\{\phi_n(x)\}$ es cerrada en el sentido de convergencia en medio. Cualquiera de las funciones f es aproximable, en media, tanto como se desee, por alguna combinación lineal de funciones ϕ_n de un sistema cerrado en el sentido indicado ¹.

Desarrollando el integrando de la Ec. (2), y teniendo presente la definición de c_n , podemos escribir esa ecuación en la forma

$$(3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{n=1}^m c_n^2 + \sum_{n=1}^m c_n^2 \right\} = 0.$$

De aquí se deduce que para una sucesión cerrada $\{\phi_n\}$ se verifica que

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Que se conoce con el nombre de *relación o ecuación de Parseval*. Si se escribe en la forma

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)^2 = \|f\|^2$$

identifica la suma de los cuadrados de los componentes de f con respecto a los vectores de referencia generalizados ϕ_n , con el cuadrado de la norma de f .

Recíprocamente, si todas las funciones f del espacio satisfacen la ecuación de Parseval, la sucesión $\{\phi_n\}$ es cerrada en el sentido de con-

¹ En la literatura matemática, los términos *cerrado* y *completo* se aplican a veces a sistemas que hemos llamado completos y cerrados, respectivamente.

vergencia en media. Esto es cierto porque las Ecs. (3) y (4) no son simplemente más que dos expresiones diferentes de la Ec. (2).

Supongamos que una función θ en el espacio, donde $\|\theta\| \neq 0$ es ortogonal a todas las funciones ϕ_n del sistema ortonormal cerrado. Reemplazando f por θ en la Ec. (5), se obtiene la contradicción $\|\theta\| = 0$; luego el sistema es completo (Sec. 27).

Teorema 2. *Si un sistema ortonormal $\{\phi_n(x)\}$ es cerrado, es también completo.*

Esta breve introducción a la teoría general de sucesiones ortogonales, basada en la convergencia en media, no será aquí continuada. *La convergencia en media no asegura la convergencia puntual*; es decir, la expresión (2) no es equivalente a la

$$(6) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = f(x)$$

para cualquier punto x del intervalo (a, b) , ni aun en el caso de que se exceptúen algunos puntos.¹ Nos ocuparemos de la convergencia puntual.

Un sistema ortonormal es *cerrado en el sentido de convergencia puntual*, por decirlo así, si su serie generalizada de Fourier para toda función f del espacio funcional que consideramos converge puntualmente a $f(x)$, excepto acaso en un número finito de puntos del intervalo fundamental. Al final de la Sec. 27 hemos indicado por qué un sistema que es cerrado en este sentido, debe ser también completo. Por consiguiente, el Teorema 2 es cierto para tales sistemas cerrados en el espacio de funciones casi-continuas.

La aplicación directa del Teorema 2 es limitada, sin embargo, a negar que un sistema sea cerrado cuando haya una función con norma positiva que sea ortogonal a cada uno de los miembros del sistema. Es en nuestro teorema de representación donde demostraremos que ciertos sistemas *son* cerrados, y, por tanto, completos, en espacios funcionales especificados.

PROBLEMAS

1. Demostrar que la sucesión $\{\sqrt{2/c} \cos(n\pi x/c)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) es ortogonal en el intervalo $0 \leq x \leq c$, pero no es un sistema completo ni siquiera en el espacio de funciones continuas con derivadas continuas sin la inclusión de alguna función constante correspondiente al caso $n = 0$. (Veremos más tarde que el sistema mayor es completo en el espacio).

2. Demostrar por qué la sucesión $\{\sin n\pi x\}$, $n = 1, 2, \dots$ es ortogonal en

¹ En el «Treatise on Advanced Calculus» pág. 408, 1940 de P. Franklin se da un ejemplo sencillo de una sucesión de funciones que convergen en media a cero, pero que divergen en todos los puntos del intervalo.

el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, pero no completa ni siquiera en el espacio de todas las funciones continuas en aquel intervalo.

3. Si una función f tiene una representación

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x)$$

en un intervalo fundamental (a, b) en el cual la sucesión $\{g_n\}$ es ortogonal pero no normalizado, $0 < \|g_n\| \neq 1$, utilizar productos interiores para demostrar formalmente que

$$A_n = \frac{(f, g_n)}{\|g_n\|^2}$$

Además, obsérvese que la serie anterior con estos coeficientes es la serie de Fourier generalizada (4), Sec. 27, donde $\phi_n = g_n/\|g_n\|$.

4. Verificar que

$$\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - g(x)f(y)]^2 dx dy = \|f\|^2 \|g\|^2 - (f, g)^2,$$

suponiendo que f y g son casi-continuas, estableciendo la desigualdad de Schwarz

$$(f, g)^2 \leq (f, f)(g, g).$$

además, obsérvese la desigualdad correspondiente para los vectores del espacio tridimensional.

5. Utilícese la desigualdad de Schwarz (Prob. 4) para demostrar que, si son funciones casi continuas en un intervalo fundamental (a, b) , y si alguna de las dos tiene norma cero, por ejemplo, $\|f\| = 0$, entonces $(f, g) = 0$.

6. Considérense funciones continuas en un intervalo fundamental $a \leq x \leq b$. Entonces, la norma de la función es nula solamente en el caso de que la función sea nula en todos los puntos del intervalo. Si dos funciones f y g tienen los mismos coeficientes de Fourier con respecto a una sucesión completa ortogonal $\{\phi_n\}$, $c_n = (f, \phi_n) = (g, \phi_n)$, $n = 1, 2, \dots$ demostrar que las funciones deben ser idénticas; esto es, $f(x) - g(x) = 0$, $a \leq x \leq b$. Esta es una propiedad de unicidad de las funciones con componentes c_n .

7. Consideremos funciones continuas en un intervalo fundamental $a \leq x \leq b$. Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión ortonormal completa. Si la serie de Fourier generalizada de una función f converge uniformemente en el intervalo, probar que su suma $S(x)$ es idéntica a $f(x)$ (ver Prob. 6). Indíquese, además, por qué la conclusión sigue siendo válida si la condición de completitud es remplazada por la condición de que la sucesión sea cerrada en el sentido de convergencia en media.

8. Demostrar que la sucesión de funciones f_n , $n = 1, 2, \dots$, donde $f_n(x) = 0$ cuando $0 \leq x \leq 1/n$, $f_n(x) = \sqrt{n}$ cuando $1/n < x < 2/n$, y $f_n(x) = 0$ cuando $2/n \leq x \leq 1$, converge a cero en todos los puntos x del intervalo $0 \leq x \leq 1$; pero que la sucesión no converge en media a cero, en aquél intervalo.

30. Funciones con valores complejos. En lo sucesivo habrá ocasiones en las que utilicemos funciones con valores complejos, o para abreviar funciones complejas, de una variable real, serán funciones de tipo

$$(1) \quad w(t) = u(t) + iv(t),$$

donde u y v son funciones con valores reales de una variable real t .

La derivada de w se define del modo natural

$$(2) \quad w'(t) = u'(t) + iv'(t),$$

supuesto que u y v sean derivables; de modo semejante

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

La operación $\bar{w} = u - iv$ de tomar el complejo conjugado de w es conmutable con las operaciones de derivación e integración; esto es, para la derivación $(\bar{w})' = \bar{w}'$. Partiendo de la Ec. (2) se puede demostrar que las reglas elementales de derivación para funciones con valores reales, tales como la fórmula que da la derivada de un producto, son aplicables a las funciones complejas.

La función exponencial $\exp z$ ó e^z se define por

$$(3) \quad \exp z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

donde $z = x + iy$, x e y reales, y el ángulo y significa y radianes. Con esta definición puede verse que e^z satisface las leyes usuales de cálculos con exponentes. Además, si x e y son funciones de una variable real t , son entonces z y $\exp z$ funciones del tipo (1) y, con la ayuda de la Ec. (2), podemos demostrar que

$$(4) \quad \frac{d}{dt}(e^z) = e^z \frac{dz}{dt}.$$

Así, por ejemplo, la función $w = \exp(ict)$ satisface la ecuación diferencial $w''(t) + c^2 w(t) = 0$ cuando c es un número complejo.

De las definiciones,

$$(5) \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

y de la definición (3) resulta que

$$(6) \quad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

y, cuando $z = z(t)$, que

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \operatorname{sen} z = \cos z \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \cos z = -\operatorname{sen} z \frac{dz}{dt}.$$

Obsérvese que $2i \operatorname{sen} t = e^{it} e^{-it}$, lo que concuerda con la fórmula (3).

Las funciones hiperbólicas

$$(8) \quad \operatorname{senh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{cosh} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

están claramente relacionadas con las funciones trigonométricas como sigue:

$$(9) \quad \operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z, \quad \operatorname{cos} iz = \operatorname{cosh} z.$$

Para cualquier ángulo θ podemos escribir

$$2(\cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos N\theta) = \sum_{n=1}^N e^{in\theta} + \sum_{n=1}^N e^{-in\theta}.$$

La suma de las dos series geométricas finitas del segundo miembro es

$$\frac{e^{i\theta} (1 - e^{iN\theta})}{1 - e^{i\theta}} + \frac{e^{-i\theta} (1 - e^{-iN\theta})}{1 - e^{-i\theta}}$$

si $e^{i\theta} \neq 1$. Esta expresión puede escribirse:

$$\frac{-\exp(\frac{1}{2}i\theta) + \exp[i\theta(N + \frac{1}{2})] + \exp(-\frac{1}{2}i\theta)}{-\exp[-i\theta(N + \frac{1}{2})]} \\ \frac{\exp(\frac{1}{2}i\theta) - \exp(-\frac{1}{2}i\theta)}{\exp(\frac{1}{2}i\theta) - \exp(-\frac{1}{2}i\theta)}$$

Obtenemos así la *identidad trigonométrica de Lagrange*

$$(10) \quad 2 \sum_{n=1}^N \cos n\theta = -1 + \frac{\operatorname{sen} [(N + \frac{1}{2})\theta]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta} \quad \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \neq 0 \right).$$

Esta identidad será utilizada en la teoría de las series de Fourier.

31. Otros tipos de ortogonalidad. A continuación se indican algunas extensiones del concepto de sistemas ortogonales de funciones.

a. Una sucesión $\{g_n(x)\}$ es ortogonal en un intervalo (a, b) con respecto a una *función peso* $p(x)$, donde $p(x) \geq 0$, si

$$(1) \quad \int_a^b p(x) g_m(x) g_n(x) dx = 0 \quad \text{cuando } m \neq n.$$

La integral anterior representa el producto interior (g_m, g_n) con respecto a la función peso, y corresponde al producto interior de vec-

tores cuando se utilizan números peso (Sec. 24). La sucesión se normaliza dividiendo g_n por $\|g_n\|$, donde

$$\|g_n\|^2 = (g_n, g_n) = \int_a^b p(x)[g_n(x)]^2 dx.$$

Este tipo de ortogonalidad se reduce al tipo ordinario, valiéndose de los productos $\sqrt{p(x)}g_n(x)$ como funciones de la sucesión.

Las funciones peso aparecerán en los sistemas ortogonales de funciones de Bessel y en algunos sistemas generados por problemas de Sturm-Liouville. Otro ejemplo es la sucesión de *polinómicos de Tchebysheff*,

$$(2) \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

que es ortogonal en el intervalo $(-1, 1)$ con respecto a la función peso

$$(3) \quad p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}.$$

b. Una sucesión $\{w_n\}$ de funciones complejas (Sec. 30) de una variable real x es ortogonal en el *sentido de Hermite* en un intervalo (a, b) , si

$$(4) \quad \int_a^b \overline{w_m(x)} w_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Esta integral es el producto interior de Hermite (w_m, w_n) . El cuadrado de la norma de w_n es real y no-negativo, puesto que

$$(5) \quad \|w_n\|^2 = \int_a^b w_n \overline{w_n} dx = \int_a^b (u_n^2 + v_n^2) dx$$

si $w_n = u_n + iv_n$, donde u_n y v_n son funciones con valores reales de x .

Ciertas funciones complejas exponenciales proporcionan los ejemplos más notables de tales sucesiones. Las funciones

$$(6) \quad e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

constituyen una sucesión con ortogonalidad hermitiana en el intervalo $(-\pi, \pi)$. La demostración queda para los problemas.

c. Para sucesiones $\{g_n(x, y)\}$ de funciones de dos variables independientes, el intervalo fundamental se reemplaza por una región del

plano xy , y las integraciones se extienden a aquella región. Semejantes extensiones se aplican a funciones de tres o más variables.

PROBLEMAS

1. Verificar que las soluciones de la ecuación diferencial

$$w''(t) + \lambda w(t) = 0,$$

en la que λ es cualquier constante compleja, puede escribirse en cualquiera de las formas:

$$\begin{aligned} w &= C_1 \exp(it\sqrt{\lambda}) + C_2 \exp(-it\sqrt{\lambda}) = C_3 \operatorname{sen} t\sqrt{\lambda} + C_4 \operatorname{cos} t\sqrt{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} C_5 \{ \exp[it\sqrt{\lambda} + C_6] + \exp[-it\sqrt{\lambda} + C_6] \} \\ &= C_5 \operatorname{cos}(t\sqrt{\lambda} + C_6), \end{aligned}$$

donde C_1, C_2, \dots, C_6 son constantes complejas arbitrarias.

2. Utilizar las Ec. (6), Sec. 30, para demostrar (a) que los ceros de las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ son todos reales, (b) que $|\operatorname{sen} z|$ y $|\operatorname{cos} z|$ no están acotados al tender $|y|$ hacia infinito.

3. Establecer la ortogonalidad hermitiana de las funciones exponenciales (6), Sec. 31, en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Demostrar además que la norma de cada una de las funciones es $\sqrt{2\pi}$.

4. Demostrar que la sucesión $\{(b-a)^{-1/2} \exp[2n\pi i x/(b-a)]\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ortonormal en el sentido hermitiano en el intervalo (a, b) .

5. Poner $\theta = \arccos x$ para establecer la ortogonalidad de los polinomios de Tchebycheff(2) con funciones peso (3) Sec. 31.

6. Poner $x = \cos \theta$ en la fórmula (2), Sec. 31, en las funciones $T_n(x)$. Desarrollar la potencia del binomio en la fórmula $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \operatorname{cos} n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ de De Moivre e igualar las partes reales para demostrar que $\operatorname{cos} n\theta$ es un polinomio de grado n en $\cos \theta$, y valiéndose de esta propiedad, demostrar que $T_n(x)$ es realmente un polinomio de grado n en x .

32. Problemas de Sturm-Liouville. En la Sec. 16 se utilizó un método de separación de variables, y superposición de funciones del tipo $X(x)T(t)$ que satisfacen las condiciones homogéneas, para escribir una solución formal de un problema de contorno relativo a los desplazamientos $y(x, t)$ de una cuerda tensa. El procedimiento exigía a la función X que fuera una solución del problema homogéneo.

$$(1) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(c) = 0.$$

Para un conjunto discreto de valores del parámetro $\lambda = n^2\pi^2/c^2$, $n = 1, 2, \dots$ encontramos que el Prob. (1) tiene las soluciones no triviales $X = \operatorname{sen}(n\pi x/c)$ y que estas funciones son ortogonales en el intervalo $(0, c)$.

Cuando se aplica a problemas de contorno más generales, en ecua-

ciones en derivadas parciales, el procedimiento lleva con frecuencia a una ecuación diferencial homogénea del tipo

$$(2) \quad X''(x) + R(x)X'(x) + [Q(x) + \lambda P(x)\alpha]X(x) = 0$$

que contiene un parámetro λ en la forma indicada, y a un par de condiciones de contorno homogéneas del tipo

$$(3) \quad a_1X(a) + a_2X'(a) = 0, \quad b_1X(b) + b_2X'(b) = 0.$$

Las funciones P , Q y R y las constantes a_1 , a_2 , b_1 y b_2 son datos del problema planteado por las ecuaciones en derivadas parciales; λ y $X(x)$ han de determinarse.

En lugar del problema consistente en las Ecs. (2) y (3), pueden aparecer otros problemas de contorno homogéneos —con contorno formado por dos puntos— y conteniendo un parámetro. Pero el Prob. (2) y (3), o *problema de Sturm-Liouville*, es de importancia fundamental¹.

Cuando sus términos se multiplican por una función

$$r(x) = \exp \left[\int R(x) dx \right],$$

que es un factor integrante para $X'' + RX'$, la ecuación de Sturm-Liouville (2) toma la forma

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dX}{dx} \right] + [q(x) + \lambda p(x)]X = 0.$$

Sometiendo a las funciones p , q y r a condiciones más bien generales, puede demostrarse que existe siempre una infinidad numerable de valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ del parámetro λ para cada uno de los cuales el problema de Sturm-Liouville (3) y (4) tiene una solución que no es idénticamente nula. Los números λ_n son los *autovalores*, *valores propios* o *números característicos*, del problema, y las soluciones correspondientes $X_n(x)$ son las *autofunciones*, *funciones propias* o *funciones características*. Obsérvese que CX_n es también una autofunción, donde C es cualquier constante diferente de cero. En el caso especial (1), $\lambda_n = n^2\pi^2/c^2$ y $X_n = \text{sen}(n\pi x/c)$.

La ortogonalidad de las funciones propias con función peso p en

¹ En los tres primeros tomos del *Journal de Mathématique*, 1836-1838 J.C.F. Sturm y J. Liouville dieron los primeros desarrollos extensos de esta teoría.

el intervalo (a, b) se establece en la siguiente Sección. Con respecto a la sucesión de autofunciones normalizadas

$$\phi_n(x) = X_n(x) \|X_n\|^{-1} \quad \text{donde } \|X_n\|^2 = \int_a^b p X_n^2 dx$$

la serie de Fourier generalizada para una función f es

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad \text{donde } c_n = \int_a^b p f \phi_n dx$$

Estableceremos la convergencia de esta serie a $f(x)$ en el intervalo (a, b) para casos especialmente notables y para casos singulares del problema de Sturm-Liouville

La teoría de representación para el caso general no se presenta en este libro ¹. Para el caso general de la demostración de que la serie (5) converge a $f(x)$ emplear generalmente la teoría de residuos de las funciones de variable compleja, o una comparación de la serie con una serie de Fourier ordinaria que represente a f . Las demostraciones se complican por el hecho de que no pueden escribirse soluciones explícitas de la ecuación de Sturm-Liouville con coeficientes arbitrarios. Se encuentran propiedades de las soluciones, por medio de interesantes y útiles artificios, a la vista de la propia ecuación diferencial.

En el caso de que $r(a) = r(b)$, lo dicho anteriormente sigue siendo cierto cuando las condiciones de contorno (3) son remplazadas por las *condiciones de contorno periódicas*

$$(6) \quad X(a) = X(b), \quad X'(a) = X'(b).$$

Tales condiciones aparecen comúnmente cuando x representa una coordenada tal como el ángulo ϕ en coordenadas cilíndricas, en un intervalo $(0, 2\pi)$.

El *adjunto* de un operador diferencial lineal M de segundo orden, donde

$$(7) \quad M[X(x)] = A(x)X''(x) + B(x)X'(x) + C(x)X(x),$$

es el operador M^* tal que,

$$(8) \quad M^*[X(x)] = [A(x)X(x)]'' - [B(x)X(x)]' + C(x)X(x).$$

¹ Se trata el caso general en el Cap. 9 de *Operational Mathematics* por R. V. Churchill. Para más información sobre la teoría de Sturm-Liouville, pueden consultarse los libros de Ince, Coddington y Levinson y Titchmarsh (*Eigenfunction Expansions*) relacionados en nuestra Bibliografía. Se trata de otros aspectos del tema de los libros de Collata y Friedman.

El operador L , donde

$$(9) \quad L[X(x)] = [r(x)X'(x)]' + q(x)X(x),$$

es *auto adjunto*; esto es, L y L^* son el mismo, pues,

$$rX'' + r'X' + qX = (rX)'' - (r'X)' + qX.$$

La forma (4) de la ecuación de Sturm-Liouville resulta ser especialmente útil porque está escrito en términos del operador auto-adjunto L ; tiene la forma

$$(10) \quad L[X(x)] = -\lambda p(x)X(x).$$

Algunas propiedades de L se harán notar explícitamente en los problemas.

33 Ortogonalidad de las autofunciones. Pueden establecerse aquí unos pocos resultados de la teoría general que serán útiles para los capítulos que siguen. En casos especiales se hallarán los autovalores y las autofunciones y, por tanto, no habrá duda acerca de su existencia.

Suponemos, a menos que se diga otra cosa, que los coeficientes en el problema de Sturm-Liouville

$$(1) \quad (rX')' + (q + \lambda p)X = 0,$$

$$(2) \quad a_1X(a) + a_2X'(a) = 0, \quad b_1X(b) + b_2X'(b) = 0$$

satisfacen las siguientes condiciones: p , q , r y r' son funciones continuas con valores reales de $x(a \leq x \leq b)$; además $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ cuando $a < x < b$, y las constantes a_1 , a_2 , b_1 y b_2 son reales e independientes de λ . Las autofunciones X_n han de satisfacer las condiciones de regularidad que generalmente se exigen a las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden (Sec. 19); a saber que X_n y X'_n sean continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$.

Teorema 3. Sean λ_m y λ_n dos autovalores distintos cualesquiera del problema de Sturm-Liouville (1) y (2), con autofunciones correspondientes X_m y X_n . Entonces, X_m y X_n son ortogonales con función peso p , en el intervalo (a, b) . La ortogonalidad existe también en los casos siguientes: (a) cuando $r(a) = 0$, caso en el cual las primeras de las condiciones de contorno (2) puede ser eliminada del problema; (b) cuando $r(b) = 0$, caso en el cual puede eliminarse la segunda de aquellas condiciones; (c) si $r(a) = r(b)$ y las condiciones (2) son remplazadas por las condiciones de contorno periódicas (6), Sec. 32.

Para demostrar este teorema observaremos primero que

$$(rX'_m)' + qX_m = -\lambda_m pX_m, \quad (rX'_n)' + qX_n = -\lambda_n pX_n$$

puesto que cada autofunción satisface la Ec. (1) cuando λ tiene el autovalor correspondiente. Multiplicando los dos miembros de estas dos ecuaciones por X_n y X_m , respectivamente, y restando se obtiene la relación

$$(3) \quad (\lambda_m - \lambda_n) pX_m X_n = (rX'_n)' X_m - (rX'_m)' X_n \\ = \frac{d}{dx} [(rX'_n) X_m - (rX'_m) X_n].$$

La reducción final a una derivada exacta, fue aquí posible por tratarse de un operador autoadjunto.

Las condiciones de continuidad exigidas permiten escribir

$$(4) \quad (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b pX_m X_n dx = [(X_m X'_n - X_n X'_m) r]_{x=a}^{x=b}.$$

La última expresión dentro del paréntesis es el valor del determinante

$$(5) \quad \Delta(x) = \begin{vmatrix} X_m(x) & X'_m(x) \\ X_n(x) & X'_n(x) \end{vmatrix};$$

y, por tanto,

$$(6) \quad (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b pX_m X_n dx = r(b) \Delta(b) - r(a) \Delta(a).$$

La primera de las condiciones de contorno (2) exige que

$$a_1 X_m(a) + a_2 X'_m(a) = 0, \quad a_1 X_n(a) + a_2 X'_n(a) = 0,$$

y para que estas ecuaciones simultáneas en a_1 y a_2 sean satisfechas por números a_1 y a_2 , de los cuales uno al menos sea diferente de cero, es necesario que el determinante $\Delta(a)$ sea cero. Análogamente, de la segunda condición de contorno, donde b_1 y b_2 no son ambos cero, se deduce que $\Delta(b) = 0$. Entonces, según la Ec. (6),

$$(7) \quad (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b pX_m X_n dx = 0$$

y puesto que $\lambda_m \neq \lambda_n$, se sigue la propiedad de ortogonalidad

$$(8) \quad \int_a^b p(x)X_m(x)X_n(x) dx = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n).$$

En el caso de que $r(a) = 0$, la condición (8) resulta de la Ec. (6) cuando $\Delta(a) \neq 0$; esto es, cuando $a_1 = a_2 = 0$, en cuyo caso la primera de las condiciones (2) desaparece. Análogamente, si $r(b) = 0$, la segunda de aquellas condiciones no es necesaria.

En el caso de que $r(a) = r(b)$, y de que se empleen las condiciones periódicas $X(a) = X(b)$, $X'(a) = X'(b)$ en lugar de las condiciones (2), entonces

$$r(b)\Delta(b) = r(a)\Delta(a)$$

y de nuevo resulta la Ec. (8). Esto completa la demostración del Teorema 3.

Supóngase que X es una autofunción correspondiente a un autovalor $\lambda = \alpha + i\beta$, donde α y β son números reales. Entonces $X(x)$, que puede ser compleja, satisface las Ecs. (1) y (2). Tomando los complejos conjugados de todos los términos de esas ecuaciones y recordando que coeficientes tienen valores reales, se ve que (Sec. 30)

$$\begin{aligned} (r\bar{X}')' + (\bar{q} + \bar{\lambda}p)\bar{X} &= 0, \\ a_1\bar{X}(a) + a_2\bar{X}'(a) &= 0, \quad b_1\bar{X}(b) + b_2\bar{X}'(b) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, \bar{X} es una autofunción correspondiente al autovalor $\bar{\lambda}$ y, de acuerdo con la Ec. (7),

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b p(x)X(x)\bar{X}(x) dx = 0.$$

Pero siendo $p(x) > 0$ cuando $a < x < b$ y $X\bar{X} = |X|^2$, resulta que la integral anterior tiene un valor positivo y, por tanto, al ser $\lambda - \bar{\lambda} = 2i\beta$, resulta que $\beta = 0$; es decir, λ es real.

Este argumento también se aplica a los casos (a), (b) y (c) del Teorema 3.

Teorema 4. *Para el problema de Sturm-Liouville, o sus modificaciones (a), (b) y (c) citadas en el Teorema 3, todos los valores propios son reales.*

34. Unicidad de las autofunciones. Designemos por X e Y dos autofunciones del problema de Sturm-Liouville (1) y (2), Sec. 33, correspondientes al mismo autovalor real λ . Supongamos que r no se anula en un extremo del intervalo, por ejemplo, $r(a) > 0$.

La combinación lineal

$$(1) \quad W(x) = Y'(a)X(x) - X'(a)Y(x)$$

satisface la ecuación diferencial homogénea

$$(2) \quad (rW')' + (q + \lambda p)W = 0;$$

y también la igualdad $W'(a) = 0$. Puesto que X e Y satisfacen las ecuaciones

$$3) \quad a_1 X(a) + a_2 X'(a) = 0, \quad a_1 Y(a) + a_2 Y'(a) = 0,$$

donde a_1 y a_2 no son a la vez cero y $W(a)$ es el determinante del par de ecuaciones anterior en a_1 y a_2 , resulta que $W(a) = 0$. De acuerdo con el teorema de unicidad relativo a las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales (Sec. 19), $W(x) = 0$ es la única solución de la Ec. (2) para la que $W(a) = W'(a) = 0$. Por consiguiente,

$$(4) \quad Y'(a)X(x) - X'(a)Y(x) = 0.$$

A menos que $Y'(a) = X'(a) = 0$, la Ec. (4) expresa que las funciones X e Y son linealmente dependientes; una de ellas es igual a la otra por una constante. Recuérdese que el cero no es una autofunción. Si $Y'(a) = X'(a) = 0$, es entonces $a_1 = 0$ en las Ecs. (3). En este caso emplearemos la combinación lineal

$$(5) \quad Z(x) = Y(a)X(x) - X(a)Y(x)$$

para demostrar de manera semejante que $Z(x) = 0$ y, por tanto, que X e Y son linealmente dependientes.

Supongamos que $X = u + iv$ es una autofunción compleja correspondiente a un autovalor real λ . Sustituyendo $u + iv$ en lugar de X es el problema de Sturm-Liouville, y separando las partes reales y las imaginarias, se ve que u y v son dos autofunciones correspondientes a λ . Por tanto, $v = ku$ y $X = (1 + ik)u$, donde k es una constante. Esto es, X es real, aunque posiblemente pueda contener un factor constante imaginario.

Reuniremos los resultados obtenidos de la forma siguiente.

Teorema 5. *Bajo la condición adicional de que bien sea $r(a) > 0$, ó $r(b) > 0$, el problema de Sturm-Liouville (1) y (2), Sec. 33, no puede tener dos autofunciones linealmente independientes que corresponden al mismo autovalor; además, cada autofunción puede hacerse con valores reales multiplicándola por una constante apropiada diferente de cero.*

Que este teorema no siempre es de aplicación cuando las condiciones (2), Sec. 33, son remplazadas por las condiciones de contorno periódicas, queda demostrado por este importante caso especial.

$$(6) \quad X'' + \lambda X = 0, \quad X(-\pi) = X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi).$$

cuando $\lambda \neq 0$, la solución de esa ecuación diferencial es

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} x \sqrt{\lambda} + C_2 \cos x \sqrt{\lambda}.$$

Si esta solución ha de satisfacer las dos condiciones de contorno ha de verificarse que

$$(7) \quad C_1 \operatorname{sen} \pi \sqrt{\lambda} = 0 \quad \text{y} \quad C_2 \cos \pi \sqrt{\lambda} = 0.$$

No pudiendo C_1 y C_2 ser simultáneamente nulas si X ha de ser una autofunción, resulta que $\lambda = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) mientras que las constantes C_1 y C_2 son arbitrarias.

En particular, para cualquier constante B_n , las dos funciones

$$(8) \quad X_n(x) = \operatorname{sen} nx, \quad Y_n(x) = B_n \operatorname{sen} nx + \cos nx$$

son autofunciones linealmente independientes correspondientes al mismo autovalor $\lambda = n^2$. Para formar pares análogos, pueden utilizarse otras combinaciones lineales de $\operatorname{sen} nx$ y $\cos nx$.

Cuando dos funciones son linealmente independientes, existe siempre una combinación lineal de ambas que es ortogonal a una de ellas (Prob. 4, Sec. 26). Si $B_n = 0$ en las Ecs. (8), Y_n es ortogonal a X_n en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Una constante es la única autofunción del Prob. (6) correspondiente al autovalor $\lambda = 0$. Según el Teorema 3, las autofunciones correspondientes a distintos autovalores son ortogonales. Aquí $p(x) = 1$. Por consiguiente, la doble sucesión

$$(9) \quad \{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \dots, 1, \cos x, \cos 2x, \dots\},$$

sistema de autofunciones del Prob. (6), es ortogonal en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Obsérvese que ello incluye la ortogonalidad de $\operatorname{sen} nx$ y $\cos nx$, cada uno de los cuales corresponde al mismo autovalor $\lambda = n^2$.

PROBLEMAS

Buscar todos los autovalores y autofunciones de los problemas de Sturm-Liouville presentados en los problemas del 1 al 6. Indicar además el intervalo

y la función peso p en la relación de ortogonalidad que según el Teorema 3 existe.

$$1. X'' + \lambda X = 0; X(0) = 0, X'(1/2\pi) = 0.$$

$$\text{Solución } X_n = \text{sen} [(2n - 1)x] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$2. X'' + \lambda X = 0; X'(0) = 0, X'(c) = 0.$$

$$\text{Solución } X_n = \cos(n\pi x/c) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$3. X'' + \lambda X = 0; X'(-\pi) = 0, X'(\pi) = 0.$$

$$\text{Solución } X_n = \cos \frac{n(+x\pi)}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

4. $(x^2 X')' + \lambda x X = 0; X(1) = 0, X(e) = 0$. Obsérvese que la ecuación diferencial se reduce a una del tipo de Cauchy después de efectuar la derivación indicada.

$$\text{Solución } X_n = x^{-1} \text{sen}(n\pi \log x), n = 1, 2, \dots; p(x) = x.$$

5. $X'' + \lambda X = 0; X(0) = 0, X(1) - X'(1) = 0$. *Sugerencias* Poner $\lambda = 0$ para demostrar que $X_0(x) = x$ es una autofunción ($\lambda_0 = 0$). Escribir $\lambda = -\alpha^2$, α real y emplear las gráficas de $y = \alpha$ e $y = \text{tanh } \alpha$ para comprobar que no existen autovalores negativos. Poner $\lambda = \alpha^2$ y usar las gráficas de $y = \alpha$ e $y = \tan \alpha$ para comprobar que los autovalores positivos son $\lambda_n = \alpha_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) donde α_n son las raíces positivas de la ecuación $\tan \alpha = \alpha$.

$$\text{Solución } X_0 = x, X_n = \text{sen } \alpha_n x \quad (n = 1, 2, \dots)$$

6. $X'' + \lambda X = 0; X(0) = 0, hX(1) + X'(1) = 0$ donde h es constante y $h > -1$ (Comparar el Prob. 5). Demostrar que los autovalores consisten solamente en los números $\lambda_n = \alpha_n^2$, donde α_n son las raíces positivas de la ecuación $h \tan \alpha = -\alpha$, y que $X_n = \text{sen } \alpha_n x$ ($n = 1, 2, \dots$)

7. Cuando $h < -1$ en el Prob. 6, demostrar que $\lambda_0 = -\alpha_0^2$ es un autovalor con autofunción $X_0 = \text{senh } \alpha_0 x$, donde α_0 es la raíz positiva de la ecuación $\text{tanh } \alpha = -\alpha/h$; demostrar que $\lambda_n = \alpha_n^2$ y $X_n = \text{sen } \alpha_n x$ ($n = 1, 2, \dots$) donde $\tan \alpha_n = -\alpha_n/h$.

8. En la Sec. 34, utilizar la función Z definida por la Ec. (5) para probar que X e Y son linealmente dependientes, en el caso $\alpha_1 = 0$.

9. Indicar los pasos que conducen a las Ecs. (7), Sec. 34.

10. Obsérvese en el problema de autovalores (6) de la Sec. 34 que si α (radianes) es un ángulo constante tal que $\text{sen } \alpha \neq 0$, las dos funciones linealmente independientes $\text{sen } nx$ y $\text{sen}(nx + \alpha)$ son dos autofunciones correspondientes al mismo autovalor $\lambda = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$). Demostrar que su combinación lineal $\cos(nx + \alpha)$ es ortogonal a $\text{sen}(nx + \alpha)$ (ver Prob. 4, Sec. 26), y por tanto que las funciones $\text{sen}(x + \alpha)$, $\text{sen}(2x + \alpha), \dots, 1, \cos(x + \alpha), \cos(2x + \alpha), \dots$ constituyen un sistema ortogonal de autofunciones en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

11. Para el problema de autovalores

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X(0) = X(2c), \quad X'(0) = X'(2c),$$

obtener el siguiente sistema ortogonal de autofunciones en el intervalo $(0, 2c)$:

$$\left\{ \text{sen} \frac{n\pi x}{c} = 1, \cos \frac{n\pi x}{c} \right\} \quad (n, n = 1, 2, \dots)$$

12. Demostrar que el operador autoadjunto L definido por la Ec. (9), Sec. 32 satisface la *identidad de Lagrange para ese operador*

$$XL[Y] - YL[X] = \frac{d}{dx} [(XY' - X'Y)r]$$

para cualquier par de funciones X , Y , suponiendo que existan todas las derivadas.

13. Si X e Y del Prob. 12 satisface las condiciones de contorno en el problema de Sturm-Liouville, o las condiciones de contorno periódicas, demostrar que

$$(X, L[Y]) = (Y, L[X]),$$

donde estos productos interiores en el intervalo (a, b) no contienen funciones peso.

14. Si N es el operador d^4/dx^4 , demostrar que

$$XN[Y] - YN[X] = \frac{d}{dx} (XY''' - YX''' - Y''X' + Y'X'').$$

Y de aquí, probar que si X_1 y X_2 son autofunciones del problema de autovalores de cuarto orden

$$N[X] = -\lambda X; \quad X(0) = X''(0) = 0, \quad X(c) = X''(c) = 0,$$

correspondientes a distintos autovalores λ_1 y λ_2 , entonces es X_2 ortogonal a X_1 en el intervalo $(0, c)$.

SERIES DE FOURIER

35. La serie básica. La serie trigonométrica

$$(1) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

es una *serie de Fourier* si sus coeficientes vienen dados por las fórmulas

$$(2) \quad \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx & (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

donde f es alguna función definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

En la Sec. 34 vimos que las funciones 1, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ..., $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 2x$, ... constituyen un sistema de autofunciones, ortogonal en el intervalo $(-\pi, \pi)$ para el problema de autovalores

$$(3) \quad \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0; \\ X(-\pi) &= X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi). \end{aligned}$$

El sistema ortogonal normalizado es

$$(4) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \right\} \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

y la serie de Fourier (4), Sec. 27, correspondiente a la función f con

respecto a ese sistema ortogonal, es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{\cos n\xi}{\sqrt{\pi}} d\xi + \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{\sin n\xi}{\sqrt{\pi}} d\xi \right].$$

Esta serie es la serie (1) con los coeficientes (2).

La correspondencia puede expresarse en la forma

$$(5) \quad f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos nx \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi + \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi \right],$$

que escrita en forma más abreviada es

$$(6) \quad f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n(x - \xi) d\xi.$$

Obsérvese que el término constante de la serie, o el término $\frac{1}{2} a_0$ de la serie (1), es el valor medio de $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Cada uno de los términos de la serie (1) es periódico en x con período 2π . Por consiguiente, cuando la serie converge a $f(x)$ en el intervalo fundamental $(-\pi, \pi)$ converge a una función periódica de período 2π que coincide con f en el intervalo fundamental; esto es, la serie representa la *extensión periódica* de f para todos los valores de x . En el caso de que f esté definida para todas las x como función periódica de período 2π , esto es, si $f(x + 2\pi) = f(x)$, la serie representa a f para cualquier valor de x cuando la representación es válida en el intervalo fundamental. Además, en este caso, cualquier intervalo de longitud 2π , tal como el intervalo $(0, 2\pi)$, sirve como intervalo fundamental.

Así, pues, la serie de Fourier (1) tiene dos aplicaciones fundamentales: (a) representar una función definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$, para valores de x en ese intervalo, o (b) representar una función periódica, con período 2π , para todos los valores de x . Es evidente que no puede representar una función para todo valor de x si la función no es periódica.

En este capítulo estableceremos la convergencia de la serie básica de Fourier a $f(x)$, sometiendo a f a condiciones no muy restrictivas. Las representaciones por medio de series de Fourier en intervalos fundamentales distintos del $(-\pi, \pi)$ seguirán fácilmente.

36. Ejemplo. Escribamos la serie de Fourier correspondiente a la función f definida como sigue, en el intervalo $-\pi < x < \pi$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } -\pi < x \leq 0. \\ x & \text{cuando } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

La gráfica de la función está indicada en la Fig. 9 con trazo grueso. Los coeficientes de Fourier son

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(0 + \int_0^{\pi} x dx \right) = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{\cos nx + nx \operatorname{sen} nx}{\pi n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx = \frac{\operatorname{sen} nx - nx \cos nx}{\pi n^2} \Big|_0^{\pi} = -\frac{(-1)^n}{n},$$

donde $n = 1, 2, \dots$. Por consiguiente, en el intervalo $(-\pi, \pi)$,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx \right].$$

Veremos pronto por qué esta serie de Fourier converge a $f(x)$ cuando $-\pi < x < \pi$. De ello se seguirá que la serie también representa la extensión periódica de la función f indicada por las líneas de

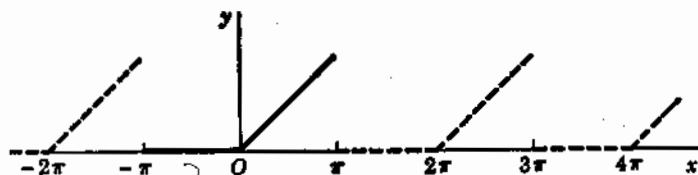


FIG. 9

puntos de la Fig. 9. La función periódica es discontinua en los puntos $x = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$. Nuestra teoría mostrará que la suma de la serie en cada uno de esos puntos debe ser $\pi/2$.

Como indicación de la convergencia de la serie a $f(x)$, pueden sumarse unos pocos términos de la serie por composición de ordenadas. Se encontrará, por ejemplo, que la gráfica de la función

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

es una aproximación ondulada a la gráfica de la Fig. 9.

37. Serie de Fourier de cosenos. Serie de senos. Si $f(-x) = f(x)$ para todos los valores de x para los que $f(x)$ está definida, f es una función *par*. Su gráfica $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas, y, si f es integrable desde $x = 0$ a $x = c$, se verifica que

$$\int_{-c}^c f(x) dx = 2 \int_0^c f(x) dx.$$

Una función de f *impar* es aquella para la que $f(-x) = -f(x)$. Su gráfica es simétrica respecto al origen y su integral entre $-c$ y c es cero.

Por ejemplo, las funciones 1 , x^2 , $\cos kx$, y $x \operatorname{sen} kx$ son pares, mientras que x , x^3 y $x^2 \operatorname{sen} kx$ son funciones impares. Aunque la mayoría de las funciones no son ni pares ni impares, toda función definida en un intervalo $(-c, c)$ es expresable como suma de una función par y una impar por medio de la identidad.

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Cuando f es una función par en el intervalo $(-\pi, \pi)$, sus coeficientes de Fourier tienen los valores

$$(2) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Por tanto, su serie de Fourier se reduce a

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) d\xi + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_0^{\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi.$$

Esta es la *serie de Fourier de cosenos* correspondiente a f en el intervalo $(0, \pi)$, con respecto a la sucesión ortogonal $\{\cos nx\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, de autofunciones del problema de Sturm-Liouville (compárese con el Prob. 2, Sec. 34).

$$(4) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0.$$

Al ser pares las autofunciones, la serie (3) representa una función par en el intervalo $(-\pi, \pi)$ si converge cuando $0 < x < \pi$.

Cuando f está definida solamente en el intervalo $(0, \pi)$, la serie es la serie de Fourier para la extensión periódica par de f , con período 2π .

Cuando f es una función impar, $a_n = 0$ y

$$(5) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx,$$

y por consiguiente,

$$(6) \quad f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx \int_0^{\pi} f(\xi) n \xi \, d\xi.$$

Esta *serie de Fourier de senos* (compárese con la Sec. 17) servirá para representar funciones impares en el intervalo $(-\pi, \pi)$ o funciones periódicas impares de período 2π para todos los valores de x . Pero también sirve para representar funciones definidas solamente en el intervalo $(0, \pi)$. De hecho, es la serie de Fourier para f con respecto a la sucesión ortogonal $\{\operatorname{sen} nx\}$ en el intervalo $(0, \pi)$, que es el sistema de autofunciones del problema de Sturm-Liouville.

$$(7) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Ejemplo. Para escribir la serie de cosenos (3) para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ observemos que

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx = 0$$

y cuando $n = 2, 3, \dots$, que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\operatorname{sen}(1+n)x + \operatorname{sen}(1-n)x] \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1 + (-1)^n}{1-n^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $a_{2n+1} = 0$ y $a_{2n} = 4\pi^{-1}(1-4n^2)^{-1}$ de modo que

$$(8) \quad \operatorname{sen} x \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Supongamos que esta correspondencia sea una igualdad para todo valor de x en el intervalo indicado, como más tarde demostraremos. Entonces, para todos los valores de x exteriores a dicho intervalo, la

serie converge a la extensión periódica par de $\sin x$ de período 2π . Esta extensión, mostrada en la Fig. 10, es la función $|\sin x|$.

Como $\sin x$ es ortogonal a $\sin nx$, cuando $n = 2, 3, \dots$, en el intervalo $(0, \pi)$, la serie de Fourier de senos (6) de la función $\sin x$ consiste en el último término $\sin x$.

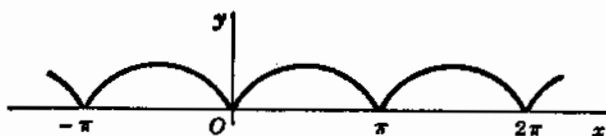


FIG. 10 $y = |\sin x|$.

38. Derivadas unidireccionales. Sea f una función cuyo límite a la derecha, $f(x_0 + 0)$, existe en el punto x_0 (Sec. 26). La *derivada a la derecha* de f en este punto se define como sigue:

$$(1) \quad f'_D(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0 + 0)}{\epsilon} \quad (\epsilon > 0),$$

cuando el límite existe. Obsérvese que es preciso que exista $f(x_0 + 0)$ para que exista $f'_D(x_0)$. En el caso que exista la derivada ordinaria (bidireccional) $f'(x_0)$ entonces $f'_D(x_0) = f'(x_0)$.

Análogamente, cuando existe $f(x_0 - 0)$, la *derivada a la izquierda* de f en x_0 está definida por la fórmula

$$(2) \quad f'_I(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \epsilon) - f(x_0 - 0)}{\epsilon} \quad (\epsilon > 0).$$

Cuando existe el límite, y $f'_I(x_0) = f'(x_0)$ si $f'(x_0)$ existe.

Como ilustración, consideremos primero la función continua

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{cuando } x \leq 0, \\ \sin x & \text{cuando } x \geq 0. \end{cases}$$

Encontramos que $f'_D(0) = 1$ y $f'_I(0) = 0$, como se ve en la gráfica de f , $f'(0)$ no existe. Para la función escalón

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x < 0, \\ 1 & \text{cuando } x > 0, \end{cases}$$

$h'(0)$ no existe; pero existen $h'_D(0)$ y $h'_I(0)$ que tienen el valor común cero. La función \sqrt{x} ($x \geq 0$) es un ejemplo de función continua que carece de derivada a la derecha en el punto $x = 0$.

Si dos funciones tienen derivada a la derecha en el punto x_0 , también la tiene su producto. Se deja para los problemas la demostración directa. Pero puede darse una demostración basada en la propiedad correspondiente de las derivadas ordinarias. Tomaremos $f(x_0 + 0)$ y $g(x_0 + 0)$ como valores de f y g en x_0 ; además, definiremos aquellas funciones cuando $x \leq x_0$ como funciones lineales representadas por las tangentes con inclinaciones $f'_D(x_0)$ y $g'_D(x_0)$, respectivamente. Estas continuaciones de f y g son derivables en x_0 , con derivadas iguales a las derivadas a la derecha. Por tanto, existe en ese punto la derivada de su producto; su valor es la derivada a la derecha de $f(x)g(x)$ en x_0 .

Análogamente, si $f'_I(x_0)$ y $g'_I(x_0)$ existen, también existe la derivada a la izquierda del producto $f(x)g(x)$ en x_0 .

Hay otra propiedad más de las derivadas unidireccionales que resultará útil en nuestra teoría de series e integrales de Fourier.

Supongamos que, tanto f como f' son funciones casi-continuas en algún intervalo, y sea el intervalo $a \leq x \leq b$ uno cualquiera de los subintervalos en el interior del cual f y f' son continuas y tienen límites unidireccionales desde el interior en los puntos extremos. Si definimos $f(a)$ como $f(a + 0)$ y $f(b)$ como $f(b - 0)$, entonces f es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Además, f' existe en el intervalo abierto, de modo que puede aplicarse el teorema del valor medio; es decir, a cada número λ ($0 < \lambda < b - a$) existe un número θ ($0 < \theta < 1$) tal que

$$(4) \quad \frac{f(a + \lambda) - f(a + 0)}{\lambda} = f'(a + \theta\lambda).$$

Como existe $f'(a + 0)$, el límite de $f'(a + \theta\lambda)$ al tender λ a cero, existe y tiene ese valor. El primer miembro de la igualdad (4) tiene, por tanto, el mismo límite; esto es, $f'_D(a) = f'(a + 0)$. Análogamente, $f'_I(b) = f'(b - 0)$.

Resulta, pues, que en cada punto x_0 de un intervalo cerrado en el que tanto f como f' son casi-continuas, las derivadas unidireccionales de f , desde el interior del intervalo, existen y son precisamente los correspondientes límites unidireccionales de f' :

$$(5) \quad f'_R(x_0) = f'(x_0 + 0), \quad f'_L(x_0) = f'(x_0 - 0).$$

La función continua

$$(6) \quad \begin{aligned} f(x) &= x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} && \text{cuando } x \neq 0, \\ f(0) &= 0, \end{aligned}$$

muestra la distinción entre las derivadas unidireccionales y límites unidireccionales de las derivadas. En este caso $f'_D(0) = f'_I(0) = 0$, mientras que los límites unidireccionales $f'(+0)$ y $f'(-0)$ no existen. La demostración queda para los problemas.

PROBLEMAS

1. Verificar directamente por integración que el sistema (4), Sec. 35, es ortogonal en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Escribir la serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ de las funciones definidas en los problemas 2, 3, 4 y 5 que siguen.

2. $f(x) = x$, cuando $-\pi < x < \pi$. Además, obténgase la suma de la serie cuando $x = \pm \pi$.

$$3. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Cuando } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{Cuando } 0 < x < \pi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Solución } 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx, \\ \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (2n-1)x}{2n-1} \end{array}$$

4. $f(x) = 0$ cuando $-\pi \leq x \leq 0$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ cuando $0 \leq x \leq \pi$.

Además, dado que la serie converge a $f(x)$ cuando $-\pi \leq x \leq \pi$, mostrar gráficamente la función representada por la serie para todos los valores de x .

$$\text{Solución } \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

5. $f(x) = e^x$ cuando $-\pi < x < \pi$.

$$\text{Solución } \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} (\cos nx - n \operatorname{sen} nx) \right]$$

6. Escribir la serie de Fourier de cosenos para la función $f(x) = x$ en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$. Dado que la serie representa a $f(x)$ en ese intervalo, mostrar gráficamente la función representada por la serie para todas las x .

$$\text{Solución } \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

7. Demostrar que la serie de cosenos encontrada en el Prob. 6 converge uniformemente con respecto a x para todas las x y en consecuencia que la serie representa alguna función periódica par que es continua para cualquier valor de x (ver Sec. 14).

Escribir (a) la serie de Fourier de cosenos, y (b) la serie de Fourier de senos correspondientes a las funciones definidas en el intervalo $(0, \pi)$ en los problemas 8 a 10.

$$8. f(x) = 1 \quad (0 < x < \pi). \quad \text{Solución } (a) 1; (b) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (2n-1)x}{2n-1}$$

9. $f(x) = \pi - x$ ($0 < x < \pi$).

$$\text{Solución (a)} \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}; \quad (b) 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

10. $f(x) = 1$ cuando $0 < x < \pi/2$, $f(x) = 0$ cuando $\pi/2 < x < \pi$.

$$\text{Solución (a)} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

11. Para la función f definida por la fórmula (6), Sec. 38, demostrar que $f_D(0) = 0$ y que $f'(+0)$ no existe.

12. Supuesto que las derivadas a la derecha de dos funciones f y g existen en el punto x_0 , demostrar que el producto de dichas funciones tiene en ese punto una derivada a la derecha introduciendo el término $f(x_0 + \epsilon)g(x_0 + 0)$ y su negativo en la diferencia

$$\Delta(fg) = f(x_0 + \epsilon)g(x_0 + \epsilon) - f(x_0 + 0)g(x_0 + 0)$$

y tomando el límite de $\Delta(fg)/\epsilon$ cuando $\epsilon \rightarrow x_0 + 0$.

39. Una fórmula de integración. Demostraremos ahora que

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Esta fórmula será utilizada en la sección siguiente.

La función par $S(x) = x^{-1} \operatorname{sen} x$ ($x \neq 0$), $S(0) = 1$ está definida para todos los valores de x por la serie alternante

$$(2) \quad S(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Por consiguiente, $0 < S(x) < 1$ cuando $0 < x \leq 1$. Además, $|S(x)| < |\operatorname{sen} x|$ cuando $x > 1$. Por lo tanto, $|S(x)| \leq 1$ cuando $x \geq 0$.

En el intervalo $0 < x < \pi$, $\operatorname{sen} x > 0$; cuando $\pi < x < 2\pi$, $\operatorname{sen} x < 0$, etc. Resulta, pues, que si $x_0 > 0$ y n es el mayor entero que cumple la condición $n\pi \leq x_0$,

$$(3) \quad \int_0^{x_0} S dx = \int_0^{\pi} S dx + \int_{\pi}^{2\pi} S dx + \dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} S dx \\ + \int_{n\pi}^{x_0} S dx \\ = A_0 - A_1 + A_2 - \dots + (-1)^{n-1} A_{n-1} \\ + (-1)^n \theta_n A_n,$$

donde A_k expresa el valor absoluto de la integral de S desde $k\pi$ a $(k+1)\pi$ y $0 \leq \theta_n < 1$. Obsérvese que $A_0 < \pi$. En el intervalo k -ésimo ($k > 0$), $|S(x)| < 1/(k\pi)$ y, por lo tanto, $A_k < 1/k$. Además, la función S es tal que $A_{k+1} < A_k$. La serie alternante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_k$$

converge, por lo tanto. Verificándose que $\theta_n A_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y que $n \rightarrow \infty$ cuando $x_0 \rightarrow \infty$, el límite de la integral (3), cuando $x_0 \rightarrow \infty$ existe. Es decir, existe la integral impropia (1).

Esta integral tiene el valor $F(0)$, donde

$$(4) \quad F(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx \quad (t \geq 0).$$

La integral (4) converge cuando $t > 0$ porque el valor absoluto de su integrando no excede el $\exp(-tx)$; además,

$$(5) \quad |F(t)| \leq \int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t} \quad (t > 0).$$

Para comprobar que F es continua cuando $t \geq 0$, observemos en primer lugar que, puesto que existe la integral, podemos escribir

$$(6) \quad F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (-1)^k e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx \quad (t \geq 0).$$

Todas las integrales tienen aquí un valor positivo no mayor que A_k en la Ec. (3). Por consiguiente, el valor absoluto del resto en esa serie alternante después de n términos no excede de A_n y $A_n < 1/n$ independiente de t . De ello se deduce fácilmente la convergencia uniforme de la serie y la continuidad de F . En particular, $F(+0) = F(0)$.

Ahora cuando $t > 0$,

$$(7) \quad F'(t) = - \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx$$

porque esta integral es uniformemente convergente en el intervalo $t \geq t_0$, donde t_0 es cualquier número positivo. Por lo tanto, $F'(t) = -(t^2 + 1)^{-1}$ y

$$(8) \quad F(t) = - \operatorname{arctg} t + C.$$

La desigualdad (5) muestra que $F(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En consecuencia, $c = \pi/2$. Pero como $c = F(+0) = F(0)$ queda así demostrada la fórmula (1).

40. Teoría preliminar. Con objeto de establecer la convergencia de una serie de Fourier hacia su función, resultarán útiles algunos teoremas preliminares o lemas, sobre límites de integrales trigonométricas. Los lemas serán formulados de modo que también puedan ser empleados en la teoría de integrales de Fourier, donde es esencial que al parámetro k de los lemas le sea permitido variar de forma continua en lugar de hacerlo tomando solamente los valores enteros. En este último caso ($k = n$), los límites del Lema 1 se deducen fácilmente de la Ec. (6), Sec. 28. El Lema 1 es una forma del *teorema de Riemann-Lebesgue*.

Lema 1. Si una función F es casi-continua en un intervalo $a \leq x \leq b$, entonces

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b F(x) \operatorname{sen} kx \, dx = 0,$$

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b F(x) \operatorname{cos} kx \, dx = 0.$$

El intervalo (a, b) puede ser dividido en un número finito de intervalos en cada uno de los cuales F es continua incluso en los extremos si sencillamente consideramos los límites desde el interior como valores de F en esos extremos. Designamos uno de esos intervalos por $p \leq x \leq q$. Entonces la fórmula (1) será cierta si demostramos que

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_p^q F(x) \operatorname{sen} kx \, dx = 0.$$

Dividiendo el intervalo (p, q) en n partes iguales por medio de los puntos $x_0 = p, x_1, x_2, \dots, x_n = q$, la integral de la Ec. (3) puede escribirse

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x) \operatorname{sen} kx \, dx$$

$$6 \quad \left. \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ F(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \operatorname{sen} kx \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [F(x) - F(x_i)] \operatorname{sen} kx \, dx \right\} \right\}$$

Efectuando la primera integración, y teniendo en cuenta que el valor absoluto de la segunda integral no excede de la integral

de $|F(x) - F(x_i)|$ se tiene

$$(4) \quad \left| \int_p^q F(x) \operatorname{sen} kx \, dx \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| F(x_i) \frac{\cos kx_i - \cos kx_{i+1}}{k} \right| \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |F(x) - F(x_i)| \, dx.$$

Si M designa el valor máximo de $|F(x)|$ en el intervalo $p \leq x \leq q$, la primera suma del segundo miembro no excede al número

$$(5) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2M}{k} = \frac{2Mn}{k}.$$

Para establecer el límite (3) demostraremos que, para cada número positivo ε , existe un número k , tal que

$$(6) \quad \left| \int_p^q F(x) \operatorname{sen} kx \, dx \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que } k > k_0.$$

Hemos efectuado las n subdivisiones iguales del intervalo solamente como medio para efectuar la demostración.

La función F es continua en el intervalo cerrado $p \leq x \leq q$. Es, por tanto, uniformemente continua en este intervalo, es decir, a cada número positivo ε' corresponde un número δ tal que

$$|F(x) - F(x_i)| < \varepsilon' \quad \text{siempre que } |x - x_i| < \delta,$$

donde x y x_i son puntos de aquel intervalo¹. Sea ε el número utilizado en la condición (6). Pongamos $\varepsilon' = \frac{1}{2} \varepsilon / (q - p)$. Entonces, si $n = n_0$, donde el entero n_0 se ha tomado suficientemente grande para que la longitud de cada subintervalo (x_i, x_{i+1}) sea menor que δ ,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |F(x) - F(x_i)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2(q-p)} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{2} \\ (n = n_0).$$

De las condiciones (4) y (5) se deduce que

$$(7) \quad \left| \int_p^q F(x) \operatorname{sen} kx \, dx \right| < \frac{2M}{k} n_0 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando } \frac{q-p}{n_0} < \delta.$$

¹ Ver P. Franklin, «Treatise on Advanced Calculus», pág. 42, 1940; o D. V. Widder, «Advanced Calculus», pág. 172, 1961.

Para este valor fijo n , elegimos ahora k lo suficientemente grande para que $2Mn/k < \epsilon/2$; por ejemplo, $k > k_1$, en donde $k_1 = 4Mn/\epsilon$. Entonces la condición (6) queda satisfecha y el límite (1) queda establecido.

Las modificaciones necesarias cuando se reemplaza $\sin kx$ por $\cos kx$, para demostrar la fórmula (2), son elementales.

Lema 2. Si F es casi-continua en un intervalo $0 \leq x \leq b$ y posee una derivada a la derecha $F'_D(0)$, entonces

$$(8) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^b F(x) \frac{\sin kx}{x} dx = \frac{\pi}{2} F(+0).$$

La integral anterior puede escribirse como la suma

$$(9) \quad F(+0) \int_0^b \frac{\sin kx}{x} dx + \int_0^b \frac{F(x) - F(+0)}{x} \sin kx dx.$$

Vimos en la Sec. 39 que $\int_0^\infty t^{-1} \sin t dt = \pi/2$. Por tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin kx}{x} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{kb} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

La función $[F(x) - F(+0)]/x$ es casi continua en el intervalo $(0, b)$ puesto que la misma F lo es, y el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(+0)}{x} \quad (x > 0),$$

que representa $F'_D(0)$ existe. De acuerdo con el Lema 1, el límite de la segunda integral de la expresión (9), cuando $k \rightarrow \infty$ es cero. De ello se deduce (8), y el Lema queda demostrado.

Lema 3. Sea F una función casi-continua en un intervalo (a, b) que posee derivadas a la derecha y a la izquierda en un punto x_0 donde $a < x_0 < b$. Entonces,

$$(10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b F(x) \frac{\sin k(x - x_0)}{x - x_0} dx = \pi \frac{F(x_0 + 0) + F(x_0 - 0)}{2}.$$

La integral anterior puede escribirse como la suma

$$\int_a^{x_0} F(s) \frac{\sin k(x_0 - s)}{x_0 - s} ds + \int_{x_0}^b F(t) \frac{\sin k(t - x_0)}{t - x_0} dt.$$

Sustituyendo la diferencia $x_0 - s$ por X en la primera de las integrales y $t - x_0$ por x en la segunda, se puede expresar su suma por

$$(11) \quad \int_0^{s-x_0} F(x_0 - x) \frac{\operatorname{sen} kx}{x} dx + \int_0^{b-x_0} F(x_0 + x) \frac{\operatorname{sen} kx}{x} dx.$$

Si ponemos $G(x) = F(x_0 - x)$ y $H(x) = F(x_0 + x)$, vemos que $G(+0) = F(x_0 - 0)$ y $H(+0) = F(x_0 + 0)$. Además, según las definiciones de las derivadas unidireccionales, se deduce que $G'_D(0)$ y $H'_D(0)$ tienen los valores $-F'_1(x_0)$ y $F'_1(x_0)$, respectivamente. El límite de la suma (11), cuando $k \rightarrow \infty$ está dado, por tanto, por el Lema 2; es

$$(12) \quad \frac{\pi}{2} [G(+0) + H(+0)] = \frac{\pi}{2} [F(x_0 - 0) + F(x_0 + 0)],$$

y así queda establecido el Lema 3.

41. Un teorema de Fourier. Un teorema que da condiciones bajo las cuales una serie de Fourier converge hacia su función se conoce con el nombre de *teorema de Fourier*. Estableceremos ahora uno de tales teoremas. Las condiciones son suficientes solamente para la representación. Resultará conveniente considerar la extensión periódica de la función.

Teorema 1. *Sea f una función casi-continua en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y periódica de período 2π . Entonces su serie de Fourier*

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n(\xi - x) d\xi$$

converge al valor

$$(2) \quad \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \quad (-\infty < x < \infty)$$

en todos los puntos x donde f tenga derivada a la derecha y a la izquierda.

Obsérvese que la serie (1) es la forma abreviada de la serie básica (1) de la Sec. 35 y que los coeficientes a_n y b_n existen debido a la casi-continuidad de f . La cantidad (2) es el valor medio de los límites de la función, desde la derecha y desde la izquierda, en el punto x ; es, simplemente, $f(X)$ si f es continua en ese punto.

La suma $S_n(x)$ de los $n + 1$ primeros términos de la serie (1) puede escribirse

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(\xi - x) \right] d\xi.$$

Aplicando la identidad trigonométrica de Lagrange (Sec. 30) a la suma entre corchetes, resulta

$$(3) \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{\operatorname{sen} [(n + \frac{1}{2})(\xi - x)]}{2 \operatorname{sen} [\frac{1}{2}(\xi - x)]} d\xi.$$

Es fácil verificar que el integrando de esa expresión es una función periódica de ξ de período 2π por tanto, su integral a lo largo de cualquier intervalo de longitud 2π es la misma. Integremos desde a a $a + 2\pi$, donde el número a se elige de manera que el punto x quede entre los límites de integración; esto es, $a < x < a + 2\pi$.

Multiplicando el numerador y el denominador del integrando por $\xi - x$ se tiene

$$(4) \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} F(\xi) \frac{\operatorname{sen} [(n + \frac{1}{2})(\xi - x)]}{\xi - x} d\xi,$$

donde, para el valor fijado de x ($a < x < a + 2\pi$),

$$(5) \quad F(\xi) = f(\xi) \frac{\frac{1}{2}(\xi - x)}{\operatorname{sen} [\frac{1}{2}(\xi - x)]}.$$

Los puntos x y ξ están en el intervalo $a \leq x \leq a + 2\pi$ y x es un punto interior. Por tanto, la distancia $|\xi - x|$ entre los dos puntos tiene un valor máximo $2D$ que es menor que la longitud 2π del intervalo. Esto es, $\frac{1}{2}|\xi - x| \leq D < \pi$, donde D depende de x .

Utilizando la función S (Sec. 39), donde $S(t) = t^{-1} \operatorname{sen} t$ cuando $t \neq 0$ y $S(0) = 1$, la Ec. (5) puede escribirse

$$(6) \quad F(\xi) = f(\xi) \left[S \left(\frac{\xi - x}{2} \right) \right]^{-1} \quad (\frac{1}{2}|\xi - x| \leq D).$$

Ahora bien, $S(t) \neq 0$ cuando $|t| \leq D < \pi$. Al ser

$$S(t) = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots,$$

resulta que $S'(t)$ existe para cualquier valor de t , y de aquí se deduce que existe la derivada de $[S(t)]^{-1}$ cuando $|t| < D$. Por consiguiente, la función

$$\left[S \left(\frac{\xi - x}{2} \right) \right]^{-1}$$

es continua y derivable con respecto a ξ cuando $\frac{1}{2}|\xi - x| < D$. De la Ec. (6) resulta que $F(\xi)$ debe ser casi-continua en el intervalo $(a, a + 2\pi)$ y que deben existir sus dos derivadas unidireccionales en el punto $\xi = x$ porque F es el producto de dos funciones que tienen esas dos propiedades. Además,

$$F(x + 0) = f(x + 0), \quad F(x - 0) = f(x - 0).$$

Por consiguiente, F satisface las condiciones del Lema 3 en el intervalo $a \leq \xi \leq a + 2\pi$. Si aplicamos ese Lema a la integral de la Ec. (4), donde $n + \frac{1}{2} = k$ y x ocupa el lugar de x_0 veremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{F(x + 0) + F(x - 0)}{2} = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2},$$

que tiene el mismo significado que el enunciado del teorema.

42. Discusión del teorema. Supongamos que la función f está definida solamente en el intervalo $(-\pi, \pi)$, y que allí es casi-continua. Entonces, el Teorema 1 es de aplicación a la extensión periódica de f . Por ello, en cada punto interior x del intervalo donde existen ambas derivadas unidireccionales, la serie de Fourier de f converge al valor medio

$$\frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)] \quad (-\pi < x < \pi)$$

Pero en los dos extremos $x = \pm \pi$ converge al valor

$$(1) \quad \frac{1}{2}[f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)],$$

supuesto que $f'_D(-\pi)$ y $f'_D(\pi)$ existen, porque éste es el valor medio de los límites unidireccionales de la función periódica en cada punto. El valor medio (1) se reduce a $f(\pi - 0)$ o a $f(-\pi + 0)$, si $f(\pi - 0) = f(-\pi + 0)$, y únicamente en este caso.

Nótese que el teorema presupone la existencia de las dos derivadas unidireccionales de la función solamente en aquellos puntos donde esa existencia asegure la convergencia de la serie al valor medio de la función. La función $g(x) = x^2/3$, por ejemplo, es continua en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, y en él posee derivadas unidireccionales excepto en el punto $x = 0$; además, $g(-\pi) = g(\pi)$. Por consiguiente, el Teorema 1 muestra que la serie de Fourier de g converge a $g(x)$ cuando $-\pi \leq x < 0$, y cuando $0 < x \leq \pi$; no asegura, en cambio, la convergencia cuando $x = 0$.

En el caso de que tanto f como f' sean casi-continuas en el intervalo $(-\pi, \pi)$, entonces las derivadas unidireccionales de la extensión periódica de f existen en cualquier punto, de modo que la serie con-

verge en todos los puntos al valor medio de los límites desde la derecha y desde la izquierda para la extensión periódica.

En la Sec. 36 escribimos la serie de Fourier de la función

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{cuando } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Esta función es continua ($-\pi < x < \pi$). Tanto f como f' son casi continuas en el intervalo $(-\pi, \pi)$ de modo que las derivadas unidireccionales de la extensión periódica de f , con período 2π existen en todos los puntos. Además, $f(-\pi + 0) = 0$ y $f(\pi - 0) = \pi$. El Teorema 1 muestra, por tanto, que la serie de Fourier hallada en la Sec. 36 converge a $f(x)$ cuando $-\pi < x < \pi$ y a $\frac{1}{2}(0 + \pi)$, o $\pi/2$ cuando $x = \pm \pi$. La gráfica periódica de la Fig. 9, con la adición de los puntos $(\pm \pi, \pi/2)$, $(\pm 3\pi, \pi/2)$, representa la suma de la serie para todas las x .

Las representaciones de las funciones casi-continuas en el intervalo $(0, \pi)$ por medio de sus series de Fourier de cosenos y sus series de Fourier de senos son casos especiales del Teorema 1, porque el teorema es aplicable a las extensiones pares e impares de las funciones al intervalo $(-\pi, \pi)$. Las series para esas extensiones se reducen a la serie de cosenos y a la de senos, respectivamente (Sec. 37). Enunciamos como corolario los teoremas de Fourier especiales.

Corolario 1. Sea f una función casi-continua en el intervalo $(0, \pi)$ definido, por convenir así, en cada punto interior x_0 , donde f es discontinua, como el valor medio $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$. Entonces, en cada punto x ($0 < x < \pi$), donde existan $f_D(x)$ y $f_I(x)$, f está representada por su serie de Fourier de cosenos.

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (0 < x < \pi),$$

donde

$$(4) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

y, además, por su serie de Fourier de senos

$$(5) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0 < x < \pi),$$

donde

$$(6) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Como la función periódica representada por la serie de cosenos (3) es par, esta serie converge en el punto $x = 0$ a $f(+0)$ si existe $f'_D(0)$; en $x = \pi$ converge a $f(\pi - 0)$ si existe $f'_D(\pi)$. La suma de la serie de senos (5) es evidentemente, 0 cuando $x = 0$ y cuando $x = \pi$.

En el capítulo 5¹ se indican condiciones más amplias que las dadas en el Teorema 1 para la convergencia de una serie de Fourier a su función.

PROBLEMAS

1. Utilizar el Teorema 1 y la serie (8). Sec. 37, para indicar por qué se verifica, para todo valor de x ,

$$|\operatorname{sen} x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Obsérvese que poniendo $x = 0$ y $x = \pi/2$ resultan como consecuencia las dos sumas infinitas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

2. Con ayuda del Teorema 1, explicar por qué las series encontradas en el Prob. 4, Sec. 38, para la función $f(x) = 0$ ($-\pi \leq x \leq 0$); $f(x) = \operatorname{sen} x$ ($0 \leq x \leq \pi$) deben converger a $f(x)$ en todos los puntos del intervalo

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

3. Demostrar que cada una de las funciones descritas en los Probs. 3 y 5, Sec. 38, satisfacen condiciones bajo las cuales las series allí encontradas deben converger al valor de la función excepto en ciertos puntos del intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, y dar la suma de la serie en esos puntos

Solución Prob. 3: $x = 0, \pm \pi$, suma = $3/2$. Prob. 5: $x = \pm \pi$, suma = $\cosh \pi$.

4. Indicar por qué la función $|x|$ está representada por su serie de Fourier en todos los puntos del intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Partiendo de esa serie, hallada en el Prob. 6, Sec. 38, demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Describir gráficamente la función a la que deba converger la serie de senos encontrada en el Prob. 10, Sec. 38, para todos los valores de x ($-\infty < x < \infty$).

6. Demostrar que la función impar $f(x) = x^{1/3}$ ($-\pi < x < \pi$) carece de derivadas unidireccionales en el punto $x = 0$. Sin hallar su serie de Fourier, indicar

¹ Para otras introducciones a la teoría de las series de Fourier véanse las referencias a Bócher y Jackson de la Bibliografía. Nuestra demostración del Teorema 1 ha seguido la orientación de Bócher.

por qué esa serie converge a $f(x)$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$, incluyendo el punto $x = 0$, ilustrando así el hecho de que la existencia de derivadas unidireccionales no es condición necesaria para la convergencia.

43. Otras formas de las series de Fourier. Sean c un número positivo cualquiera y f una función periódica de período $2c$ casi-continua en el intervalo $(-c, c)$. Definimos $f(x)$ en todos los puntos de discontinuidad como el valor medio de $f(x + 0)$ y $f(x - 0)$. Del Teorema 1 se deduce un teorema de Fourier cambiando la unidad de longitud en el eje de las x .

Introduzcamos una nueva variable independiente t ,

$$(1) \quad t = \frac{\pi}{c}x;$$

entonces $-\pi < t < \pi$ cuando $-c < x < c$, y $f(x) = f(ct/\pi)$. Ponemos $F(t) = f(ct/\pi)$. La función F es periódica con período 2π , y continua en un punto t si f es continua en el punto correspondiente x . De la casi-continuidad de f en el intervalo $(-c, c)$ podemos deducir que F es casi continua en el $(-\pi, \pi)$, y de la definición de $f(x)$ en todos los puntos de discontinuidad encontramos que $F(t)$ tiene la media de los valores $F(t + 0)$ y $F(t - 0)$ en sus puntos de discontinuidad. Además, la existencia de las derivadas unidireccionales de f en un punto x asegura la existencia de esas derivadas de F en el punto correspondiente t .

De acuerdo con el Teorema 1, en todo punto t donde existen $F'_D(t)$ y $F'_I(t)$, $F(t)$ está representada por su serie de Fourier; esto es,

$$(2) \quad f\left(\frac{ct}{\pi}\right) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt),$$

donde

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ct}{\pi}\right) \cos nt \, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ct}{\pi}\right) \operatorname{sen} nt \, dt.$$

Con la sustitución (1), la Ec. (2) se convierte en

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \right).$$

Las fórmulas (3) de los coeficientes pueden escribirse, efectuando la sustitución (1) en la variable de integración,

$$(5) \quad \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \cos \frac{n\pi x}{c} dx & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

La serie de la Ec. (4) con los coeficientes (5) es la *serie de Fourier de las funciones periódicas de período 2c*. El sistema de funciones

$$(6) \quad \left\{ 1, \cos \frac{m\pi x}{c}, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \right\} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

utilizado en el desarrollo (4) es el sistema ortogonal de autofunciones del problema de autovalores

$$(7) \quad X'' + \lambda X = 0; \quad X(-c) = X(c), \quad X'(-c) = X'(c).$$

La representación (4) se utiliza para funciones definidas solamente en el intervalo $(-c, c)$, así como para funciones periódicas. Pero como en el caso especial $c = \pi$, es más sencillo enunciar el teorema de Fourier como sigue como expresión conteniendo extensiones periódicas de las funciones.

- Corolario 2. Si una función f es periódica con período $2c$, casi-continua en el intervalo $(-c, c)$, y está definida en sus puntos de discontinuidad por su valor medio desde la derecha y desde la izquierda, entonces en cada punto x donde existan $f'_{D}(x)$ y $f'_{I}(x)$, $f(x)$ tiene como representación en serie de Fourier la serie (4) con los coeficientes (5).

En el caso de que f sea una función par, el desarrollo anterior se reduce a la representación por la *serie de Fourier de cosenos*.

$$(8) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{c},$$

donde

$$(9) \quad a_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \cos \frac{n\pi x}{c} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Esta es la representación de una función f en el intervalo $(0, c)$

expresada por medio de las autofunciones del problema Sturm-Liouville.

$$(10) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X'(0) = 0, \quad X'(c) = 0.$$

Cuando f es impar, la serie de la representación (4) se convierte en la *serie de Fourier de senos* para el intervalo $(0, c)$ introducido en la Sec. 17.

Si expresamos $\cos(n\pi x/c)$ y $\sin(n\pi x/c)$ por medio de funciones exponenciales imaginarias y escribimos

$$(11) \quad \gamma_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad \gamma_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad \gamma_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\ (n = 1, 2, \dots),$$

la representación (4) toma la forma

$$(12) \quad f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^{\infty} \gamma_n \exp \frac{in\pi x}{c}.$$

Esta es la *forma exponencial del desarrollo en serie de Fourier* de una función periódica de período $2c$. La fórmula (11) puede escribirse

$$(13) \quad \gamma_n = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c f(x) \exp \left(-\frac{in\pi x}{c} \right) dx \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Nótese que la suma de la Ec. (12) incluye el término γ_0 correspondiente a $n = 0$. Ahí, el límite es el *valor principal* de la suma

$$(14) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \exp \frac{in\pi x}{c} = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \exp \frac{in\pi x}{c} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \gamma_n \exp \frac{in\pi x}{c},$$

obtenida agrupando γ_0 con los primeros m términos de cada una de las dos series últimas, tomando entonces el límite, como $m \rightarrow \infty$, de la suma de los términos en ese grupo. El valor principal de una serie sumada desde $n = -\infty$ a $n = \infty$ existe a veces cuando la serie diverge; pero si la serie converge, su suma es la misma que el valor principal.

Los detalles de la obtención de la expresión (12) quedan para los problemas.

44. Las funciones trigonométricas ortonormales. Utilizaremos el símbolo $C'_s(a, b)$ para designar la clase, o espacio funcional, de todas las funciones f tales que tanto f como f' sean casi-continuas en el inter-

valo (a, b) . Las derivadas unidireccionales de tales funciones, desde el interior del intervalo, existen, por consiguiente, en todos los puntos x tales que $(a \leq x \leq b)$; además, el número de discontinuidades en el intervalo es finito.

El Corolario 2 se aplica a la extensión periódica, de período $2c$, de cada una de las funciones del espacio $C'_s(-c, c)$, para demostrar que $f(x)$ tiene como representación por serie de Fourier la serie (4), Sec. 43, en todos los puntos x ($-c < x < c$), donde f es continua. Esta serie es el caso especial de la serie de Fourier generalizada en el intervalo $(-c, c)$ con respecto al sistema ortonormal

$$(1) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2c}}, \frac{1}{\sqrt{c}} \cos \frac{m\pi x}{c}, \frac{1}{\sqrt{c}} \sin \frac{n\pi x}{c} \right\} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

en ese intervalo. Las funciones de este sistema pertenecen al espacio $C'_s(-c, c)$. Puesto que la representación está asegurada, excepto, a lo más, en un número de puntos finito en el intervalo, podemos enunciar el siguiente resultado, utilizando la terminología introducida en el Cap. 3.

Corolario 3. *En el espacio funcional $C'_s(-c, c)$ el sistema ortogonal de funciones (1) es cerrado en el sentido de la convergencia puntual. Es también completo.*

Se indicó en la Sec. 29 que el sistema debe ser completo si es cerrado. Obsérvese que se enuncia el corolario para funciones cuyas derivadas unidireccionales existen para todos los puntos del intervalo.

De la representación de funciones en el intervalo $(0, c)$ por medio de serie de Fourier de senos o de cosenos se deducen los enunciados correspondientes para el sistema ortonormal.

$$(2) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}}, \sqrt{\frac{2}{c}} \cos \frac{n\pi x}{c} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

y para el sistema ortonormal

$$(3) \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{n\pi x}{c} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

en el intervalo $(0, c)$.

Corolario 4. *En el espacio funcional $C'_s(0, c)$ cada uno de los sistemas ortonormales (2) y (3) es cerrado en el sentido de la convergencia puntual, y cada uno de ellos es completo.*

PROBLEMAS

* 1. Si $f(x+2c) = f(x)$ para todas las x y $f(x) = -1$ cuando $-c < x < 0$, $f(x) = 1$ cuando $0 < x < c$, y $f(0) = f(c) = 0$, demostrar que para todas las x ($-\infty < x < \infty$) se verifica que

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{c}.$$

2. Si $f(x) = 0$ cuando $-2 < x < 1$ y $f(x) = 1$ cuando $1 < x < 2$, y $f(1) = f(2) = f(-2) = \frac{1}{2}$, demostrar que, cuando $-2 \leq x \leq 2$,

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \right].$$

3. Demostrar que, cuando $0 \leq x \leq c$,

$$x^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{4c^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{c},$$

y partiendo de ahí, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Demostrar que, cuando $-1 < x < 1$,

$$x + x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{\pi n^2} \cos n\pi x - \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\pi x \right).$$

5. Si $f(x) = \cos \pi x$ cuando $0 < x < 1$ y $f(x) = 0$ cuando $1 < x < 2$ y $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = -\frac{1}{2}$ y $f(x+2) = f(x)$ para todas las x , escribir la serie de Fourier de f y explicar por qué la serie debe converger para cualquier valor de x a $f(x)$.

$$\text{Solución} \quad \frac{1}{2} \cos \pi x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen} 2n\pi x.$$

6. Emplear la serie de Fourier de senos en el intervalo $(0,1)$ para demostrar que

$$\cos \pi x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen} 2n\pi x \quad (0 < x < 1).$$

7. Si $f(x) = \frac{1}{4}c - x$ cuando $0 \leq x \leq \frac{1}{2}c$ y $f(x) = x - \frac{3}{4}c$ cuando $\frac{1}{2}c \leq x \leq c$, utilizar la serie de cosenos en el intervalo $(0,c)$ para establecer la representación

$$f(x) = \frac{2c}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(4n-2)\pi x}{c} \quad (0 \leq x \leq c).$$

8. En la Sec. 43, escribir la representación de Fourier (4) en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \right);$$

y obtener luego la forma exponencial (12) de esa representación y la fórmula (13) de los coeficientes γ_n . Obsérvese además cómo aquellos mismos valores de γ_n pueden obtenerse formalmente de la ecuación (12) aprovechando la ortogonalidad hermitiana (Sec. 31) de las funciones exp. $(in\pi x/c)$ en el intervalo $(-c, c)$.

9. Emplear la forma exponencial (12, Sec. 43, de la representación de Fourier, cuando $c = \pi$ para demostrar que, si $-\pi < x < \pi$,

$$e^x = \frac{\operatorname{sen} \pi}{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \frac{(-1)^n}{1 - in} \exp(inx).$$

(Compárese con el Prob. 5, Sec. 38).

10. Indicar por qué el sistema de funciones coseno $\{\cos(n\pi x/c)\}$ donde $n = 1, 2, \dots$, excluyendo una función constante, es cerrado en el sentido de convergencia puntual, en el subespacio del espacio funcional $G'_s(0, c)$ consistente en todas las funciones f de ese espacio para las cuales

$$\int_0^c f(x) dx = 0.$$

11. Si f es casi continua en un intervalo $(0, c)$ y b_n designan los coeficientes de la serie de Fourier de senos de f en ese intervalo (Sec. 17), utilizar la desigualdad de Bessel (Sec. 28) para probar que la serie de términos b_n^2 converge y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{2}{c} \int_0^c [f(x)]^2 dx.$$

De aquí, deducir que $b_n \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$, y observar que esta conclusión se deduce también del Lema 1.

12. Si f es casi continua en el intervalo $(0, c)$ demostrar que los coeficientes (9), Sec. 43, satisfacen la condición

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \frac{2}{c} \int_0^c [f(x)]^2 dx$$

(comparar con el Prob. 11) y deducir que $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

13. Si f es casi continua en el intervalo $(-c, c)$, demostrar que los coeficientes (5), Sec. 43, satisfacen la condición

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{1}{c} \int_{-c}^c [f(x)]^2 dx.$$

(Comparar con el Prob. 11).

14. (a). Los coeficientes b_n de la serie de Fourier de senos de una función casi-continua f en un intervalo $(0, c)$, son aquellos para los que una combina-

ción lineal finita de las funciones seno se convierte en la mejor aproximación en la media a $f(x)$ a lo largo del intervalo $(0, c)$. Demostrar que lo dicho se deduce del Teorema 1, Sec. 28.

(b) Buscar los valores de A_1 , A_2 , y A_3 tales que la función

$$y = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + A_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{2} + A_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2}$$

sea la mejor aproximación en la media a la función $f(x) = 1$ sobre el intervalo $(0, 2)$. Además dibujar la gráfica de y utilizando los coeficientes hallados, y compararla con la gráfica de $f(x)$.

Solución $A_1 = 4/\pi$, $A_2 = 0$, $A_3 = 4/(3\pi)$.

15. El Teorema 1 asegura la convergencia de la serie de Fourier con los términos seno y coseno correspondientes agrupados en un solo término ($a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$). Cuando f satisface las condiciones enumeradas en el teorema y cuando x es un punto tal que $f'(x)$ y $f'(-x)$ existen, demostrar que

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Por tanto los términos coseno forman una serie convergente en el punto. ¿Por qué debe converger también la serie formada por los términos seno?

OTRAS PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

Al establecer la unicidad de las soluciones de los problemas de contorno en ecuaciones entre derivadas parciales (Cap. 10), es a veces conveniente conocer las condiciones que debe cumplir una función para que su serie de Fourier converja uniformemente a lo largo del intervalo fundamental. En la siguiente sección trataremos de tales condiciones. Nuestras aplicaciones posteriores no contienen operaciones de derivación e integración de series de Fourier; sin embargo, ampliaremos aquí nuestra teoría para tratar de estas operaciones básicas con las series. Las Secs. 46 a 49 pueden dejar de leerse sin interrumpir la continuidad del texto.

45. Convergencia uniforme. Si A_n y B_n ($n = 1, 2, \dots, m$) representan números reales, la ecuación cuadrática en x ,

$$\sum_{n=1}^m (A_n x + B_n)^2 = x^2 \sum_{n=1}^m A_n^2 + 2x \sum_{n=1}^m A_n B_n + \sum_{n=1}^m B_n^2 = 0,$$

no puede tener raíces reales distintas. Porque si tiene una raíz real $x = x_0$, entonces $A_n x_0 + B_n = 0$ para cualquier n , y, por consiguiente, la relación $-B_n/A_n$ debe ser independiente de n e igual a aquel número x_0 para todos los A_n diferentes de cero. En el caso de que $A_n = 0$ para algún n , entonces $B_n = 0$. El discriminante de la ecuación cuadrática es, por tanto, negativo o nulo, esto es,

$$(1) \quad \left(\sum_{n=1}^m A_n B_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^m A_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^m B_n^2 \right).$$

La condición (1) se conoce con el nombre de *desigualdad de Cauchy*. Cuando $m = 3$, quiere decir sencillamente que el cuadrado del producto interior de dos vectores no supera al producto de los cuadrados de sus longitudes. La propiedad correspondiente de los productos inte-

riores de funciones es la desigualdad de Schwarz (Prob. 4, Sec. 29). Utilizaremos la desigualdad de Cauchy para demostrar el teorema siguiente:

Teorema 1. *Sea f una función continua en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ y cuya derivada f' sea casi-continua en ese intervalo. Entonces la serie*

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

converge, siendo a_n y b_n los coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Aplicando el criterio de comparación puede verse que las dos series

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

convergen como consecuencia de la convergencia de la serie (2).

Los coeficientes de Fourier de f'

$$(4) \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx,$$

existen a causa de la casi-continuidad de f' . Como f es continua y $f(-\pi) = f(\pi)$,

$$(5) \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \, dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

Además, cuando $n = 1, 2, \dots$, puede verse por integración por partes que

$$(6) \quad \alpha_n = \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} [f(x) \cos nx]_{-\pi}^{\pi} \\ = nb_n + \frac{\cos n\pi}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = nb_n,$$

$$(7) \quad \beta_n = -\frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} [f(x) \sin nx]_{-\pi}^{\pi} = -na_n.$$

Obsérvese que la condición $f(-\pi) = f(\pi)$, bajo la cual la extensión periódica de f es también continua, es necesaria si la Ec. (6) ha de reducirse a la forma $\alpha_n = nb_n$.

Designemos ahora por S_m la suma parcial de la serie infinita (2). Según las relaciones (6) y (7),

$$S_m = \sum_{n=1}^m \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}.$$

Como $S_m \geq 0$, se deduce de la desigualdad de Cauchy (1) que

$$(8) \quad S_m \leq \left[\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^m (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right]^{1/2}.$$

La primera suma de la derecha está acotada para todos los valores de m porque la serie infinita de términos positivos $1/n^2$ converge.

De la desigualdad de Bessel (Sec. 28 o Prob. 13, Sec. 44) para la función casi-continua f' con respecto al sistema ortonormal

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\} \quad (k, n = 1, 2, \dots)$$

en el intervalo $(-\pi, \pi)$, encontramos que para cada m ,

$$\sum_{n=1}^m (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx,$$

puesto que $\alpha_0 = 0$. Por consiguiente, el segundo miembro de la condición (8) está acotado para todos los valores de m , y también lo está S_m .

Como S_m es una sucesión acotada no-decreciente, su límite, cuando m tiende a infinito, existe; esto es, la serie (2) converge, como se dice en el teorema.

Teorema 2. *En las condiciones enunciadas en el Teorema 1, la convergencia de la serie de Fourier*

$$(9) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

a $f(x)$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ es absoluta y uniforme con respecto a x en este intervalo.

Las condiciones que han de cumplir f y f' aseguran la continuidad y la existencia de derivadas unidireccionales, de la extensión periódica de f para todas las x . De nuestro teorema de Fourier (Sec. 41) se deduce que la serie (9) converge a $f(x)$ en todo el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Ahora bien,

$$|a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| \leq |a_n| + |b_n|$$

y la serie de las constantes $|a_n| + |b_n|$ converge porque cada una de las series (3) converge. El criterio de comparación y el criterio M de Weierstrass (Sec. 14) demuestran que la convergencia de la serie (9) es absoluta y uniforme como se dice en el Teorema 2.

También se pueden aplicar los criterios para demostrar la convergencia de las dos series separadas formadas solamente por términos coseno o por términos seno; también la convergencia es absoluta y uniforme. Por tanto, la serie (9) es la suma de esas series; es decir,

$$(10) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

y ambas series convergen aquí absoluta y uniformemente.

46. Observaciones. Una serie de Fourier no puede converger uniformemente a lo largo de un intervalo que contenga alguna discontinuidad de su suma, porque una serie de funciones continuas uniformemente convergente siempre converge hacia una función continua. Por ello resulta necesario imponer a f alguna condición de continuidad tal como la continuidad supuesta en el Teorema 2, con objeto de asegurar la convergencia uniforme de la serie de Fourier hacia $f(x)$.

Las modificaciones de los Teoremas 1 y 2 para series de cosenos o de senos, o para las series de Fourier en un intervalo $(-c, c)$ son fáciles de ver. Por ejemplo, se deduce del Teorema 2 que la serie de Fourier de cosenos de una función continua f , en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, converge uniformemente a $f(x)$ en ese intervalo si f' es casi-continua en el intervalo. Sin embargo, para la serie de senos son necesarias las condiciones adicionales $f(0) = f(\pi) = 0$.

Consideremos el espacio de funciones que satisface las condiciones enunciadas en el Teorema 1. La ecuación de Parseval (Sec. 9) con respecto a las funciones trigonométricas ortonormales en el intervalo $(-\pi, \pi)$ es satisfecha por cualquier función f de aquel espacio. Puede verse esto multiplicando el desarrollo en serie de Fourier de

f por $f(x)$, lo que deja todavía a la serie uniformemente convergente, e integrando, lo que da

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx \right].$$

Esta es la ecuación de Parseval

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right].$$

Según ella, se puede decir (Sec. 29) que el sistema ortonormal de funciones trigonométricas es cerrado en el sentido de la convergencia en media en el espacio funcional.

47. Derivación de las series de Fourier. Hemos visto que la serie de Fourier de la función $f(x) = x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ converge a $f(x)$ en todos los puntos interiores de ese intervalo; es decir

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Pero esa serie no es derivable. La serie derivada

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos nx$$

no converge, ya que su término n -ésimo no se aproxima a cero cuando n tiende a infinito. La extensión periódica de f de período 2π , representada por la primera serie para todas las x , tiene discontinuidades en los puntos $x = \pm \pi$.

La continuidad de las funciones periódicas es una condición importante para la derivabilidad de las series de Fourier. Las condiciones suficientes pueden enunciarse como sigue.

Teorema 3. Si f es una función continua en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, tal que $f(-\pi) = f(\pi)$, y f' es casi-continua en ese intervalo, la serie de Fourier es la representación

$$(1) \quad (x)f = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

es derivable en todo punto donde exista $f''(x)$:

$$(2) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad (-\pi < x < \pi).$$

Como la función f' satisface las condiciones de nuestro teorema de Fourier, está representada por su serie de Fourier en todo punto x donde exista su derivada $f''(x)$. En esos puntos f' es continua, de modo que

$$(3) \quad f'(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \quad (-\pi < x < \pi),$$

donde α_n y β_n son los coeficientes (4), Sec. 45. Pero cuando f satisface las condiciones enunciadas en la primera fase del Teorema 3, se encuentra en la Sec. 45 que

$$(4) \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n = nb_n, \quad \beta_n = -na_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Una vez efectuadas estas sustituciones, la Ec. (3) toma la forma (2). Esto completa la demostración del teorema.

En un punto x donde no existe $f''(x)$, pero donde f' tenga derivadas a la derecha y a la izquierda, la derivación es todavía válida en el sentido de que la serie de la Ec. (2) converge hacia la media de los valores $f'(x+0)$ y $f'(x-0)$. Esto es cierto también para la extensión periódica de f .

Con los naturales cambios, el Teorema 3 es aplicable también a otras formas de la serie de Fourier. Por ejemplo, si f es continua y f' es casi-continua en un intervalo $0 \leq x \leq c$, la serie de Fourier de cosenos de f en ese intervalo es derivable en todos los puntos donde existe $f''(x)$.

48. Integración de las series de Fourier. La integración de una serie de Fourier es posible en condiciones mucho más generales que las necesarias para la derivación. Esto era de esperar porque una integración introduce un factor n en el denominador del término general. En el siguiente teorema se demostrará que ni siquiera es esencial que la serie original converja a su función para que la serie integrada converja a la integral de la función. Desde luego, la serie integrada no es una serie de Fourier si $a_0 \neq 0$ porque entonces contiene un término $a_0 x/2$.

Teorema 4. Si f es una función casi continua en el intervalo $(-\pi, \pi)$, entonces, converja o no la serie de Fourier de f ,

$$(1) \quad f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

siempre se verifica la igualdad

$$(2) \quad \int_{-\pi}^x f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} a_0(x + \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n \operatorname{sen} nx - b_n (\cos nx - \cos n\pi)],$$

cuando $-\pi \leq x \leq \pi$. La última serie se obtiene por integración término a término de la primera.

Como f es casi-continua, la función F , donde

$$(3) \quad F(x) = \int_{-\pi}^x f(\xi) d\xi - \frac{1}{2}a_0x,$$

es continua; además

$$F'(x) = f(x) - \frac{1}{2}a_0,$$

excepto en los puntos donde f es discontinua. Por tanto, F' es casi-continua en el intervalo $(-\pi, \pi)$. También

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi - \frac{1}{2}a_0\pi = a_0\pi - \frac{1}{2}a_0\pi = \frac{1}{2}a_0\pi,$$

y $F(-\pi) = \frac{1}{2}a_0\pi$; por consiguiente, $F(\pi) = F(-\pi)$. De acuerdo entonces con nuestro teorema de Fourier, para todas las x en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, se verifica que

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx),$$

donde

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \operatorname{sen} nx dx.$$

Cuando $n \neq 0$, integrando por partes las dos últimas integrales

aprovechando que F es continua y F' casi-continua, se tiene

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n\pi} [F(x) \operatorname{sen} nx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \operatorname{sen} nx \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{1}{2} a_0 \right] \operatorname{sen} nx \, dx = -\frac{1}{n} b_n. \end{aligned}$$

Análogamente, $B_n = a_n/n$; en consecuencia

$$(4) \quad F(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \operatorname{sen} nx - b_n \operatorname{cos} nx)$$

cuando $-\pi \leq x \leq \pi$. Pero como $F(\pi) = \frac{1}{2} a_0 \pi$,

$$\frac{1}{2} a_0 \pi = \frac{1}{2} A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} b_n \operatorname{cos} n\pi.$$

Con el valor de A_0 aquí dado, la Ec. (4) se convierte en

$$F(x) = \frac{a_0 \pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n \operatorname{sen} nx - b_n (\operatorname{cos} nx - \operatorname{cos} n\pi)].$$

Teniendo presente la Ec. (3), resulta en seguida la Ec. (2).

El teorema puede escribirse para la integral desde x_0 a x , cuando $-\pi \leq x_0 \leq \pi$ y $-\pi \leq x \leq \pi$, observando que

$$\int_{x_0}^x f(\xi) \, d\xi = \int_{-\pi}^x f(\xi) \, d\xi - \int_{-\pi}^{x_0} f(\xi) \, d\xi.$$

PROBLEMAS

1. Nótese que la función f , donde $f(x) = 0$ cuando $-\pi \leq x \leq 0$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$ cuando $0 \leq x \leq \pi$, satisfacen todas las condiciones de los Teoremas 1 y 2. Comprobar directamente de la serie de Fourier de f , encontrada en el Prob. 4, Sec. 38, que la serie converge uniformemente para todos los valores de x . Indicar además por qué esta serie es derivable en el intervalo $(-\pi, \pi)$ excepto en los puntos $x = 0, \pm \pi$ y describir la función representada por la serie derivada para todos los valores de x .

2. Derivar la serie de Fourier de cosenos de la función $f(x) = x$ en el intervalo $0 < x < \pi$ (Prob. 6, Sec. 38), para obtener el desarrollo en serie de Fourier de senos de la función $f'(x) = 1$ en ese intervalo. Indicar por qué se puede en este caso aplicar el procedimiento.

3. Enunciar el Teorema 3 en la forma en que debe aplicarse a la serie de Fourier de senos en el intervalo $(0, \pi)$. En particular, indicar por qué las condiciones $f(0) = f(\pi) = 0$ están presentes en este caso.

4. Demostrar que los coeficientes de Fourier a_n y b_n de la función f del Teorema 1 satisfacen las condiciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n b_n = 0.$$

5. Integrar de 0 a x ($-\pi \leq x \leq \pi$) la serie de Fourier obtenida (a) en el Prob. 2, Sec. 38; (b) en el Prob. 3, Sec. 38. Describir las funciones representadas por las nuevas series.

49. Condiciones más generales. Indicaremos aquí algunos de los muchos resultados más generales de la teoría de las series de Fourier. Serán solo enunciados sin demostración; nuestro objeto es simplemente informar al lector de la existencia de tales teoremas. Introduciremos primero algunos conceptos contenidos en los teoremas.

Una función g definida en todos los puntos de un intervalo cerrado se denomina *monótona no-decreciente* en ese intervalo si su valor $g(x)$ nunca disminuye cuando x aumenta. Un ejemplo, en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, es la función escalón G , donde

$$(1) \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } -\pi \leq x < \frac{1}{2}\pi \text{ y } G(\pi) = \pi, \\ \frac{n}{n+1} \pi & \text{cuando } \frac{n}{n+1} \pi \leq x < \frac{n+1}{n+2} \pi \\ & (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Esta función no es casi-continua en el intervalo; gráficamente, tiene saltos hasta la recta $y = x$ en el conjunto infinito de puntos $x = n\pi/(n+1)$. La función $-G$ es monótona no-creciente.

Una función f de *variación acotada* en un intervalo $a \leq x \leq b$ puede definirse como aquello que es la suma de dos funciones monótonas g y h ,

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

donde g es no-decreciente y h es no-creciente. Cada una de las dos funciones tiene las siguientes propiedades¹. Los límites unidireccionales $f(x+0)$ y $f(x-0)$ desde el interior del intervalo existen en todos los puntos; f tiene a lo más una infinidad numerable de discontinuidades en el intervalo, y f está acotada y es integrable a lo largo del intervalo.

a. *Otro teorema de Fourier.* Sea f una función periódica de período 2π tal que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ existe, y tal que si la integral es impropia, sea absolutamente convergente. Entonces, en todo punto x que sea inte-

¹ Ver, por ejemplo, P. Franklin, «Treatise on Advanced Calculus» páginas 255 y siguientes, 1940.

rior a un intervalo en el cual f sea de variación acotada, la serie de Fourier de la función converge hacia el valor

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

La extensión periódica de la función G , definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$ por las condiciones (1), por ejemplo, satisface las condiciones de este teorema, pero no las de nuestro Teorema 1 de Fourier del Cap. 4. Para esta función periódica la serie converge en cualquier punto hacia el valor medio de los límites a la derecha y a la izquierda.

La serie de cosenos de la función \sqrt{x} en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$ converge a \sqrt{x} a lo largo de ese intervalo, incluyendo el punto $x = 0$ donde no existe derivada a la derecha. Además, la serie de la función no acotada $x^{-1/2}$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ representa a la función en el intervalo excepto en el punto $x = 0$.

b. Convergencia uniforme. Supongamos que la función periódica integrable f descrita anteriormente en (a) satisface esta condición adicional: en algún intervalo $a \leq x \leq b$ la función es continua y de variación acotada. Entonces su serie de Fourier converge uniformemente a $f(x)$ en todo intervalo cerrado interior al intervalo (a, b) .

La serie de la función $f(x) = x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$, por ejemplo, converge uniformemente a x en el intervalo $-3 \leq x \leq 3$.

Hemos observado anteriormente que las sumas parciales $S_m(x)$ de la serie de Fourier de una función periódica f no pueden aproximarse uniformemente a $f(x)$ en un intervalo que contenga un punto donde f sea discontinua. La naturaleza de la desviación de $S_m(x)$ con respecto a $f(x)$ en tales intervalos se conoce con el nombre de *fenómeno de Gibbs*¹.

c. Integración. La relación de Parseval

$$(2) \quad \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$$

queda satisfecha siempre que f esté acotada y sea integrable en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Es decir, esta serie de cuadrados de los coeficientes de Fourier de f converge a $\pi^{-1} \|f\|^2$.

Las demostraciones de los teoremas enunciados anteriormente en (a), (b) y (c) se dan en algunos de los textos citados en el Apéndice².

Sea F una función que satisface también las condiciones enumeradas en (c), y A_n y B_n sus coeficientes de Fourier. Entonces, $a_n + A_n$

¹ Ver H. S. Carslaw, «Theory of Fourier's Series and Integrals».

² Ver, en particular, Witteraker y Watson, «Modern Analysis», Cap. 9.

y $b_n + B_n$ son los coeficientes de $f + F$, y, de acuerdo con la ecuación de Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) + F(x)]^2 dx = \frac{1}{2} (a_0 + A_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + A_n)^2 + (b_n + B_n)^2].$$

Si restamos la ecuación correspondiente a $f - F$, se obtiene la *ecuación de Parseval para el producto interior*.

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F(x) dx = \frac{1}{2} a_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n).$$

Pongamos en la Ec. (3)

$$F(x) = \begin{cases} g(x) & \text{cuando } -\pi < x < t \\ 0 & \text{cuando } t < x < \pi \end{cases} \quad (-\pi \leq t \leq \pi),$$

donde g está acotado y es integrable en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Entonces la Ec. (3) toma la forma

$$(4) \quad \int_{-\pi}^t f(x)g(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^t g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^t g(x) \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^t g(x) \sin nx dx \right].$$

Por consiguiente, del enunciado (c) se sigue que si la serie de Fourier correspondiente a una función integrable f se multiplica por cualquier otra función g de la misma clase y se integra después término a término, la serie resultante converge a la integral del producto $f(x)g(x)$. Cuando $g(x) = 1$, tenemos un teorema general para la integración de una serie de Fourier.

Como ya se ha indicado (Sec. 29), el enunciado (c) implica que en el espacio de las funciones integrables acotadas en el intervalo $(-\pi, \pi)$ el sistema ortonormal de funciones trigonométricas (4), Sec. 35, es cerrado en el sentido de la convergencia en media.

INTEGRALES DE FOURIER

50. La fórmula integral de Fourier. Ya hemos demostrado que la serie de Fourier

$$(1) \quad \frac{1}{2c} \int_{-c}^c f(\xi) d\xi + \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-c}^c f(\xi) \cos \left[\frac{n\pi}{c} (\xi - x) \right] d\xi$$

converge a $f(x)$ cuando $-c < x < c$, supuesto que la función f satisfaga ciertas condiciones en el intervalo $(-c, c)$. Es suficiente que f sea casi-continua en el intervalo y, que en cada punto interior x tenga derivadas unidireccionales y esté definida como la media de sus límites $f(x + 0)$ y $f(x - 0)$.

Supongamos que f satisface esas condiciones en cualquier intervalo finito. Entonces, puede darse a c cualquier valor fijo, arbitrariamente grande, pero finito y la serie (1) representará a $f(x)$ a lo largo del gran intervalo $-c < x < c$. Pero esta representación de la serie no puede aplicarse para el resto del eje de las x a menos que f sea periódica de período $2c$ debido a que la suma de la serie tiene esta periodicidad.

Para indicar una representación que pueda ser válida para todos los valores de x cuando f no sea periódica, es natural intentar extender la representación anterior dejando que c tienda a infinito. El primer término de la serie (1) se haría entonces cero, supuesto que f sea tal que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi$ exista. Escribiremos $\Delta\alpha = \pi/c$; entonces, los términos restantes toman la forma

$$(2) \quad \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\alpha \int_{-c}^c f(\xi) \cos [n\Delta\alpha(\xi - x)] d\xi \quad \left(c = \frac{\pi}{\Delta\alpha} \right).$$

Expresados en función de g_c , donde

$$(3) \quad g_c(\alpha, x) = \int_{-c}^c f(\xi) \cos [\alpha(\xi - x)] d\xi \quad \left(c = \frac{\pi}{\Delta\alpha} \right),$$

la serie de la expresión (2) se convierte en

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_c(n\Delta\alpha, x) \Delta\alpha.$$

Dejemos fijo el valor de x . Cuando $\Delta\alpha$ es un número positivo pequeño, los puntos $n\Delta\alpha$ están igualmente expresados a lo largo de todo el semieje positivo de las x de modo que la serie (4) puede considerarse como una aproximación de la integral.

$$(5) \quad \int_0^{\infty} g_c(\alpha, x) d\alpha,$$

donde c es grande, o de la integral $\int_0^{\infty} g_{\infty}(\alpha, x) d\alpha$. Nótese, sin embargo, que el límite de la serie (4), cuando $\Delta\alpha \rightarrow 0$, no es la definición de la integral impropia (5), ni aun en el caso de que pudiera conservarse fijo el valor de c ; además, la función g_c cambia con $\Delta\alpha$ porque $c = \pi/\Delta\alpha$.

Lo dicho hasta ahora sugiere meramente que, bajo condiciones apropiadas, la función f podría tener la representación

$$(6) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos [\alpha(\xi - x)] d\xi d\alpha \quad (-\infty < x < \infty).$$

Esta es la *fórmula integral de Fourier* de la función f , que se establecerá en la sección siguiente.

La fórmula expresa $f(x)$ por medio de funciones seno y coseno de x , es la forma

$$(7) \quad f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha \quad (-\infty < x < \infty),$$

donde

$$(8) \quad \begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi, \\ B(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \alpha \xi d\xi \end{aligned}$$

Las fórmulas (7) y (8) son de aspecto parecido a las representaciones por series de Fourier y a las fórmulas de los coeficientes a_n y b_n .

51. Un teorema sobre la integral de Fourier. El teorema que sigue da las condiciones que debe cumplir f para que la fórmula integral de Fourier sea válida.

-Teorema 1. *Sea f una función casi-continua en todo intervalo finito sobre el eje de las x y definido por el valor $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ en todos los puntos de discontinuidad x_0 , y tal que existe la integral.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Entonces en cada punto x donde existan las derivadas unidireccionales $f'_D(x)$ y $f'_I(x)$ la función está representada por la fórmula integral de Fourier

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos [\alpha(\xi - x)] d\xi d\alpha \quad (-\infty < x < \infty).$$

Demostremos en primer lugar que con las condiciones indicadas

$$(2) \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\text{sen} [\beta(\xi - x)]}{\xi - x} d\xi = \pi f(x),$$

donde x es un punto en el que existen las derivadas unidireccionales de f . De esta forma se generaliza el resultado del Lema 3, Sec. 40, de modo que pueda aplicarse a las integrales impropias.

La función $S(t) = t^{-1} \text{sen } t$ ($t \neq 0$), $S(0) = 1$ es continua y $|S(t)| \leq 1$, para todos los valores reales de t (Sec. 39). Se deduce fácilmente que el integrando de la Ec. (2)

$$(3) \quad g(\xi, \beta, x) = \beta f(\xi) \frac{\text{sen} [\beta(\xi - x)]}{\beta(\xi - x)}$$

es una función casi-continua de ξ en cualquier intervalo parcial y que $|g(\xi, \beta, x)| \leq |\beta f(\xi)|$. Por ser f absolutamente integrable a lo largo del eje de las x , la integral impropia de la Ec. (2) existe. Pongamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \beta, x) d\xi - \pi f(x) = h(\beta, x)$$

y establezcamos el límite (2) demostrando que, para el valor fijo

de x , a cada número positivo ϵ corresponde un número β , tal que

$$(4) \quad |h(\beta, x)| < \epsilon \quad \text{siempre que } \beta > \beta_1.$$

Si a y b designan números tales que el intervalo $a < \xi < b$ contenga al punto $\xi = x$, entonces

$$|h(\beta, x)| = \left| \int_{-\infty}^a g \, d\xi + \int_a^b g \, d\xi - \pi f(x) + \int_b^{\infty} g \, d\xi \right| \\ \leq \int_{-\infty}^a |g| \, d\xi + \left| \int_a^b g \, d\xi - \pi f(x) \right| + \int_b^{\infty} |g| \, d\xi$$

$$y \quad \int_{-\infty}^a |g| \, d\xi \leq \int_{-\infty}^a \frac{|f(\xi)|}{|x - \xi|} \, d\xi \leq \frac{1}{x - a} \int_{-\infty}^a |f(\xi)| \, d\xi.$$

El último miembro es independiente de β y tiende a cero cuando $a \rightarrow -\infty$. Por tanto, para el número dado ϵ , existe un valor a de a , independiente de β tal que

$$\int_{-\infty}^{a_1} |g(\xi, \beta, x)| \, d\xi < \frac{\epsilon}{3}.$$

Análogamente existe un número b_1 independiente de β , tal que

$$\int_{b_1}^{\infty} |g(\xi, \beta, x)| \, d\xi < \frac{\epsilon}{3},$$

y, en consecuencia,

$$(5) \quad |h(\beta, x)| < \frac{2}{3}\epsilon + \left| \int_{a_1}^{b_1} g \, d\xi - \pi f(x) \right|.$$

Según el Lema 3, Sec. 40, existe un número β_1 tal que el valor absoluto final de la condición (5) es menor que $\epsilon/3$ cuando $\beta > \beta_1$. Esto establece la condición (4) y el límite (2).

Podemos escribir la fracción en el integrando de la fórmula (2) como una integral y presentar aquella fórmula en la forma

$$(6) \quad \pi f(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_0^{\beta} \cos[\alpha(\xi - x)] \, d\alpha \, d\xi.$$

Para todos los valores de α la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos[\alpha(\xi - x)] \, d\xi$$

es uniformemente convergente con respecto a α según el criterio de Weierstrass. Por consiguiente

$$\int_0^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos [\alpha(\xi - x)] d\xi d\alpha \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_0^{\beta} \cos [\alpha(\xi - x)] d\alpha d\xi$$

de modo que la fórmula (6) pueda escribirse en la forma

$$\pi f(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos [\alpha(\xi - x)] d\xi d\alpha,$$

que es la fórmula integral de Fourier (1).

Se conocen otras condiciones de validez de la fórmula¹. Las condiciones que debe cumplir f pueden hacerse menos severas cuando se emplean las integrales de Lebesgue en lugar de las de Riemann.

Cuando se cumplen las condiciones indicadas en el Teorema 1, las integrales de las Fórmulas (8), Sec. 50, para los coeficientes $A(\alpha)$ y $B(\alpha)$ existen, y, por consiguiente, puede escribirse la fórmula integral en la forma (7) de la Sec. 50.

PROBLEMAS

1. Comprobar que todas las condiciones del Teorema 1 son satisfechas por la función f :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 && \text{cuando } |x| < 1, \\ f(x) &= 0 && \text{cuando } |x| > 1, \\ f(1) &= f(-1) = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

y efectuada la comprobación demostrar que para cualquier valor de x ($-\infty < x < \infty$) se verifica que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin [\alpha(1-x)] + \sin [\alpha(1+x)]}{\alpha} d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha.$$

2. Utilizar la fórmula de integración deducida en la Sec. 39 para demostrar que la integral $\int_0^{\infty} t^{-1} \sin kt dt$ tiene el valor $\frac{1}{2}\pi$ cuando $k > 0$, $-\frac{1}{2}\pi$ cuando $k < 0$ y cero cuando $k = 0$. Valiéndose de estos resultados, calcular la primera integral escrita en el Prob. 1 cuando $|x| < 1$, cuando $|x| > 1$, y cuando $|x| = 1$ para efectuar la comprobación directa de la representación por integral de Fourier allí encontrada para la función escalón f :

¹ Ver, por ejemplo, Carslaw, «Theory of Fourier's Series and Integrals», páginas 315 y siguientes, y Titchmarsh, «Theory of Fourier Integrals».

3. Si $f(x)$ cuando $x < 0$ y $f(x) = e^{-x}$ cuando $x > 0$ y $f(0) = 1/2$, demostrar que f satisface todas las condiciones de nuestro teorema sobre la integral de Fourier y por tanto para cada valor de x , que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \alpha \operatorname{sen} \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha \quad (-\infty < x < \infty).$$

Verificar directamente esta representación en el punto $x = 0$.

4. Demostrar que

$$\exp(-|x|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha \quad (-\infty < x < \infty).$$

5. Si $f(x) = 0$ cuando $x \leq 0$ y cuando $x \geq \pi$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$ cuando $0 \leq x \leq \pi$, demostrar que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \cos [\alpha(\pi - x)]}{1 - \alpha^2} d\alpha \quad (-\infty < x < \infty).$$

en particular, escribir $x = 1/2\pi$ para demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 1/2\pi\alpha}{1 - \alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

6. Indicar por qué la fórmula integral de Fourier no puede representar la función f si $f(x) = 1$ ($-\infty < x < \infty$). Notar además, que la condición del Teorema 1 no queda satisfecha por esa función.

7. En la fórmula integral de Fourier, Sec. 51, demostrar por qué no resulta posible cambiar el orden de integración con respecto a ξ y a α a no ser que se escriba la fórmula en la forma (6).

8. Si una función no-nula f es periódica para todos los valores de x , indicar por qué $f(x)$ y $|f(x)|$ no son integrables desde $x = -\infty$ a $x = \infty$.

52. Formas seno o coseno. Sea f una función *impar* que satisfice las condiciones del Teorema 1. Entonces, $f(\xi) \cos \alpha\xi$ y $f(\xi) \operatorname{sen} \alpha\xi$ son funciones impar y par de ξ , respectivamente, cuyas integrales impropias a lo largo de todo el eje de las ξ existen. Por consiguiente,

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \alpha\xi d\xi = 0,$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen} \alpha\xi d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen} \alpha\xi d\xi,$$

y la fórmula integral de Fourier

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x] d\alpha$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

se reduce a la fórmula integral de Fourier de senos

$$(2) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \alpha x \int_0^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen} \alpha \xi \, d\xi \, d\alpha.$$

Si en cambio, f es una función par, entonces

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi \, d\xi, \quad B(\alpha) = 0$$

y la fórmula (1) se convierte en la fórmula integral de Fourier de cosenos

$$(3) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi \, d\xi \, d\alpha.$$

En el caso de que $f(x)$ esté definida solamente en el intervalo semi-infinito $x > 0$, las fórmulas (2) y (3) se aplican respectivamente a las extensiones de f impares y pares, para representar a $f(x)$ cuando $x > 0$, según las condiciones siguientes.

Corolario 1. Sea f una función semi-continua en cualquier intervalo finito del semieje positivo de las x y definido como la media de sus límites $f(x_0 + 0)$ y $f(x_0 - 0)$ en todos los puntos $x_0 (x_0 > 0)$, donde f es discontinua. Supongamos, además, que existe la integral $\int_0^{\infty} |f(x)| \, dx$. En-

tonces, en todo punto $x (x > 0)$ donde existan derivadas a la derecha y a la izquierda, la función está representada por su fórmula integral de Fourier de senos (2) u por su fórmula integral de Fourier de cosenos (3).

Bajo esas condiciones, cuando $x = 0$, la fórmula integral de cosenos (3) representa $f(+0)$ en el caso de que exista $f'_D(0)$, como puede verse considerando la extensión par de f . El segundo miembro de la fórmula integral de senos (2) tiene evidentemente el valor cero cuando $x = 0$.

El problema de autovalores

$$(4) \quad \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 & (x > 0); \\ X(0) &= 0, \quad |X(x)| < M & (x > 0), \end{aligned}$$

donde M es una constante positiva, es singular porque su intervalo fundamental $x > 0$ no está limitado. Cuando $\lambda \neq 0$, una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición $X(0) = 0$ es $\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}$, y está acotada para todos los valores positivos de x únicamente en el caso de que $\sqrt{\lambda}$ tenga valores reales. Pongamos $\sqrt{\lambda} = \alpha$;

entonces, aparte de un factor constante, las autofunciones son $X = \sin \alpha x$, donde α toma todos los valores positivos reales. Los autovalores $\lambda = \alpha^2$ son continuos en lugar de discretos. Aunque las autofunciones $\sin \alpha x$ no tienen la propiedad de la ortogonalidad, la fórmula integral de senos (2) de Fourier da una representación de las funciones f en el intervalo $x > 0$ como una combinación lineal generalizada de aquellas autofunciones.

Análogamente, $\lambda = \alpha^2 (\alpha \geq 0)$ y $X = \cos \alpha x$ son los autovalores y autofunciones del problema singular

$$(5) \quad \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 & (x > 0); \\ X'(0) &= 0, & |X(x)| < M & (x > 0), \end{aligned}$$

y la fórmula (3) representa las funciones f por medio de términos de $\cos \alpha x$.

×53. **La forma exponencial.** Cuando se cumplen las condiciones enunciadas en el Teorema 1, la fórmula integral de Fourier puede escribirse

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta \int_{-\infty}^{\infty} 2f(\xi) \cos [\alpha(\xi - x)] d\xi d\alpha.$$

Expresemos la función coseno por medio de funciones exponenciales. Como f es absolutamente integrable, las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi$$

convergen uniformemente con respecto a α para todas las α positivas según indica el criterio de Weierstrass. Esta convergencia uniforme en unión de la semi-continuidad de f implica que esas integrales representan funciones continuas de α (ver Prob. 9, Sec. 54). Por lo tanto, la integral iterada de la fórmula (1) puede escribirse como la suma

$$(2) \quad \int_0^\beta e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi d\alpha + \int_0^\beta e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi d\alpha$$

puesto que las integrales definidas con respecto a α existen como integrales de funciones continuas de α . (Sin embargo, las integrales impropias desde $\alpha = 0$ a $\alpha = \infty$ pueden no existir.)

Con la sustitución $\alpha' = -\alpha$ el segundo término de la suma (2) toma la forma

$$\int_{-\beta}^0 e^{-i\alpha' x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha'\xi} d\xi d\alpha'.$$

Quitando aquí las «primas», la suma (2) puede escribirse

$$\int_{-\beta}^{\beta} e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi d\alpha.$$

Por lo tanto, la forma exponencial de la fórmula integral de Fourier (1) es

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi d\alpha,$$

donde $-\infty < x < \infty$. El signo menos del exponente $-i\alpha x$ puede pasarse al exponente $i\alpha\xi$ usando $-\alpha$ como variable de integración.

El límite de la fórmula (3) se conoce como *valor principal de Cauchy* de la integral impropia desde $-\infty$ a ∞ con respecto a α . El valor principal puede existir aunque no existe la integral impropia. La integral $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha d\alpha$, por ejemplo, no tiene valor; pero su valor principal existe, y es igual a cero porque $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha d\alpha = 0$ para todo valor de β .

En el caso de que exista la integral impropia, ésta es entonces igual a su valor principal.

A menos que se impongan a f condiciones adicionales, el valor principal utilizado en la fórmula (3) no puede ser remplazado por la integral impropia, como lo demostrará un ejemplo. La función

$$(4) \quad \begin{array}{ll} f(x) = 0 & \text{cuando } x < 0, \\ f(x) = e^{-x} & \text{cuando } x > 0, \\ f(0) = 1/2 & \text{en } x = 0 \end{array}$$

satisface todas las condiciones de nuestro teorema integral de Fourier. Está representada por la fórmula (3), en todo punto x , en particular, en el $x = 0$. En este caso

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_0^{\infty} e^{-\xi(1-i\alpha)} d\xi = \frac{1}{1-i\alpha} = \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2}$$

Por lo tanto, cuando $x = 0$ en la fórmula (3), la integral se convierte en

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha = \left[\operatorname{arctg} \alpha + \frac{i}{2} \log(1+\alpha^2) \right]_{-\beta}^{\beta} = 2 \operatorname{arctg} \beta,$$

que tiene el límite π cuando $\beta \rightarrow \infty$. El segundo miembro de la

fórmula (3) tiene, por consiguiente, el valor $1/2$, que es $f(0)$. Pero la integral impropia de la función (5), desde $-\infty$ a ∞ no existe, pues, la función $\alpha(1 + \alpha^2)^{-1}$ no es integrable desde 0 a ∞ .

Las funciones $e^{-i\alpha x}$ ($-\infty < \alpha < \infty$) son autofunciones del problema de autovalores singular

$$(6) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad |X(x)| < M \quad (-\infty < x < \infty),$$

donde M es una constante. Los autovalores $\lambda = \alpha^2$ comprenden todos los números reales no-negativos, y la representación de las funciones f por medio de autofunciones está dada por la fórmula (3).

× 54. **Transformaciones de Fourier.** La fórmula integral de Fourier de senos puede escribirse en la forma

$$(1) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha \quad (x > 0),$$

donde

$$(2) \quad F_s(\alpha) = \int_0^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen} \alpha \xi \, d\xi \quad (\alpha > 0).$$

Si f es una función dada, entonces la Ec. (1) es una *ecuación integral* en la función F_s , una ecuación que contiene en el integrando la función incógnita. Es una ecuación integral *singular* porque la integral es impropia. La Ec. (2) da una solución de esa ecuación integral cuando f satisface las condiciones enunciadas en el Corolario 1, como puede verse sustituyendo la expresión (2) en lugar de F_s en la Ec. (1).

La función F_s definida por la Ec. (2) es la transformada de Fourier de senos. La transformación (2), que se puede abreviar en la forma

$$(3) \quad F_s(\alpha) = S_{\alpha}\{f\},$$

establece una correspondencia entre las funciones f y F_s . Las funciones f satisfacen las condiciones del Corolario 1, tienen transformadas F_s tales que la fórmula (1) da f en función de su transformada; esto es, la fórmula (1) da la transformación inversa.

Supongamos que f , f' y f'' son continuas cuando $x \geq 0$, que $f(x)$ y $f(x')$ tienden a cero cuando $x \rightarrow \infty$, y que f es absolutamente integrable de 0 a ∞ . Entonces, por medio de sucesivas integraciones por partes se demuestra que (Prob. 7)

$$(4) \quad S_{\alpha}\{f''(x)\} = -\alpha^2 F_s(\alpha) + \alpha f(0).$$

Esta es la propiedad operativa básica de la transformación seno, la de remplazar la forma diferencial $f''(x)$ por una forma algebraica F_s, α , y el valor inicial $f(0)$.

La propiedad (4), junto con otras propiedades operativas de la transformación, conducen a la reducción de ciertos tipos de problemas de contorno a problemas más sencillos en las transformadas de las funciones incógnitas. El estudio de este método operativo, empleando las diversas transformaciones de Fourier y la afín de Laplace, puede hacerse en varios textos¹.

La transformación de Fourier de cosenos F_c de una función f es

$$(5) \quad F_c(\alpha) = \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi \, d\xi = C_s\{f\} \quad (\alpha > 0).$$

La inversa de la transformación $C_s\{f\}$ está dada por la fórmula integral de Fourier de cosenos

$$(6) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha \quad (x > 0).$$

La propiedad operativa básica, válida bajo las condiciones indicadas anteriormente para la propiedad (4), comprende a $f'(0)$

$$(7) \quad C_s\{f''(x)\} = -\alpha^2 F_c(\alpha) - f'(0).$$

Otras transformaciones de Fourier incluyen la forma exponencial

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha \xi} \, d\xi = F(\alpha) \quad * \quad (-\infty < \alpha < \infty)$$

cuyo inverso está dado por la fórmula (3), Sec. 53, y también ciertas transformaciones integrales a lo largo de intervalos limitados llamados transformaciones de Fourier finitas.

PROBLEMAS

1. Si $f(x) = 1$ cuando $0 < x < k$ y $f(x) = 0$ cuando $x > k$, y $f(k) = 1/2$, demostrar que la fórmula integral de Fourier de senos se aplica a f para dar la representación

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos k\alpha}{\alpha} \sin \alpha x \, d\alpha \quad (x > 0).$$

¹ Churchill, R. V. Matemáticas operacionales, 2.^a ed. 1958.

2. Utilizar el Corolario 1 y la fórmula integral de Fourier de senos para demostrar que

$$e^{-x} \cos x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha^4 + 4} d\alpha \quad (x > 0).$$

3. Emplear la fórmula integral de Fourier de cosenos y demostrar que

$$e^{-x} \cos x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 + 2}{\alpha^4 + 4} \cos \alpha x d\alpha \quad (x \geq 0).$$

4. Aplicar la propiedad operativa (4), Sec. 54, a la función e^{-kx} , donde k es una constante positiva, para demostrar que la transformada seno de Fourier de esa función es $\alpha(\alpha^2 + k^2)^{-1}$; de aquí, obtener la representación.

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha^2 + k^2} d\alpha \quad (x > 0, k > 0).$$

5. Utilizar la propiedad operativa (7), Sec. 54, para demostrar que la transformada coseno de e^{-kx} donde k es una constante positiva, es $k(\alpha^2 + k^2)^{-1}$; y de aquí, demostrar que

$$e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + k^2} d\alpha \quad (x \geq 0, k > 0).$$

6. Establecer la representación

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{6}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha x}{(\alpha^2 + 1)(\alpha^2 + 4)} d\alpha \quad (x \geq 0).$$

En el problema de contorno tratado en la Sec. 15, demostrar que la función

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} g(\alpha) e^{-\alpha y} \operatorname{sen} \alpha x d\alpha \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

satisface la condición de contorno adicional

$$u(x, 0) = e^{-x} - e^{-2x} \quad (x \geq 0)$$

si g es la función absolutamente integrable

$$g(\alpha) = \frac{6}{\pi} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 1)(\alpha^2 + 4)} \quad (\alpha \geq 0).$$

7. Cuando f , f' y f'' son continuas ($x \geq 0$) emplear la integración por partes para demostrar que, para cada constante positiva c ,

$$\int_0^c f''(x) \operatorname{sen} \alpha x dx = f'(c) \operatorname{sen} \alpha c - \alpha f(c) \cos \alpha c + \alpha f(0) - \alpha^2 \int_0^c f(x) \operatorname{sen} \alpha x dx.$$

(En este caso la continuidad de f'' puede remplazarse por la condición de que f'' sea casi-continua en cada intervalo $(0, c)$. Suponiendo además que $f(x)$ y $f'(x)$ tienden a cero cuando $x \rightarrow \infty$ y que existe la transformada seno de Fourier $F_s(x)$, demostrar que el segundo miembro de la ecuación anterior tiene el límite $\alpha f(0) - \alpha^2 F_s(x)$ cuando $c \rightarrow \infty$. Deducir la existencia de la transformada seno de f'' y demostrar que satisface la propiedad operativa (4), Sec. 54.

8. Obtener la propiedad operativa (7), Sec. 54 para la transformada coseno de f'' (comparar con el Prob. 7).

9. Si $f(\xi)$ es casi-continua en todo intervalo $(-c, c)$ del eje de las ξ explicar por qué la función

$$\phi(\alpha) = \int_{-c}^c f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi$$

es continua para todos los valores reales de α . Cuando, además, f es absolutamente integrable a lo largo de todo el eje de las ξ , entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi = F(\alpha)$$

es uniformemente convergente con respecto a α . Escribir

$$F(\alpha) = \phi(\alpha) + \int_{-\infty}^{-c} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi + \int_c^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi$$

y probar que $F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) \rightarrow 0$ cuando $\Delta\alpha \rightarrow 0$ haciendo primero grande a c , independiente de α y $\Delta\alpha$ y después tomando $|\Delta\alpha|$ pequeño para hacer pequeña a $|\Delta\phi|$, estableciendo así la continuidad de $F(\alpha)$ utilizada en la Sec. 53.

10. Establecer la siguiente propiedad operativa de la transformación de Fourier

$$E_{\alpha}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha) \quad (-\infty < \alpha < \infty)$$

Si f, f' y f'' son continuas para todos los valores de x , si existe la transformada $F(\alpha)$ de f , y si $f(x)$ y $f'(x)$ tienden ambas a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$, entonces

$$E_{\alpha}\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) \quad (-\infty < \alpha < \infty).$$

11. Comprobar la representación de la integral seno de Fourier

$$\frac{x}{x^2 + k^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \alpha \xi}{\xi^2 + k^2} d\xi d\alpha \quad (k > 0)$$

observando que, según el Prob. 4, la integral interior tiene aquí el valor $(\pi/2)e^{-k\xi}$ y la exterior es entonces la transformada seno de aquella función exponencial de α . Nótese que la función $x/(x^2 + k^2)$ no es absolutamente integrable desde $x = 0, x = \infty$.

PROBLEMAS DE CONTORNO

55. Soluciones formales y rigurosas. La precedente teoría de representación de funciones dadas por medio de series e integrales de Fourier nos permite emplear el método de separación de variables y superposición para la resolución de tipos importantes de problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales. En este capítulo se aplica el método a varios problemas de contorno que son el planteamiento matemático de problemas de física.

Mostraremos modos de probar que la función hallada satisface verdaderamente la ecuación en derivadas parciales y todas las condiciones de contorno y las de continuidad. Una vez hecho esto, la función queda rigurosamente establecida como una solución del problema. El problema físico puede indicar que solamente debe existir una solución. En el Cap. 10 dedicamos algún espacio a esta cuestión de la unicidad de las soluciones.

Aun incluso para algunos de los problemas más sencillos, el procedimiento completo, consistente en determinar una solución y demostrar que ésta es la única, puede ser largo e incluso difícil. Seguiremos el procedimiento completo en solo unos pocos casos. La mayor parte de los problemas serán resueltos *formalmente* en el sentido de que posiblemente no comprobemos por completo la solución o que no demos que ésta es única.

56. La cuerda vibrante, desplazada inicialmente. En la Sec. 16 intentamos encontrar una fórmula para los desplazamientos transversales $y(x,t)$ de una cuerda tensa entre dos puntos fijos $(0,0)$ y $(c,0)$, después de que la cuerda queda libre a partir de una posición $y = f(x)$ en el plano xy (Fig. 11). Se exige, por tanto, a la función y que satisfaga todas las condiciones del problema de contorno.

- $$\begin{aligned} (1) \quad & y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t) & (0 < x < c, t > 0), \\ (2) \quad & y(0,t) = 0, \quad y(c,t) = 0 & (t \geq 0), \\ (3) \quad & y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = 0 & (0 \leq x \leq c). \end{aligned}$$

Empleando separación de variables, superposición y la ortogonalidad de las funciones $\text{sen}(n\pi x/c)$ llegamos a la solución formal

$$(4) \quad y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi t}{c},$$

donde

$$(5) \quad b_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{c} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La función dada f ha de ser continua en el intervalo $(0 \leq x \leq c)$; además, $f(0) = f(c) = 0$. Supondremos que f' es al menos casi-continua en el intervalo. Bajo estas condiciones sabemos que f está representada por su serie de Fourier de senos en ese intervalo. Los coeficientes de esta serie son los números b_n dados por la Ec. (5). Por tanto,

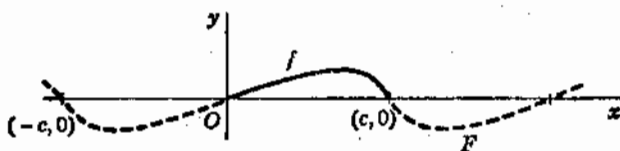


FIG. 11

cuando $t = 0$, la serie de la fórmula (4) converge a $f(x)$; esto es, $y(x,0) = f(x)$ cuando $0 \leq x \leq c$.

La naturaleza del problema pide una solución $y(x,t)$, que sea continua en x y t cuando $0 \leq x \leq c$ y $t \geq 0$ y tal que $y_t(x,t)$ sea continua respecto a t en $t = 0$. Entonces los valores de contorno prescritos son los valores límites en los contornos $y(0,t) = y(+0,t)$, $y(c,t) = y(c-0,t)$, etc.

Para demostrar que la fórmula (4) representa una solución debemos demostrar que la serie que contiene converge hacia una función continua $y(x,t)$, que, en unión con sus derivadas parciales, satisface la ecuación de las ondas (1) y las condiciones de contorno. Pero puede ocurrir que la serie no sea dos veces derivable con respecto a x y t aun en el caso de que la serie tenga una suma $y(x,t)$ que pueda satisfacer la ecuación de las ondas. En el caso de la cuerda pulsada (Sec. 18), por ejemplo, los coeficientes b_n son proporcionales a n^{-2} $\text{sen}(n\pi/2)$ de modo que, después de derivar la serie correspondiente a $y(x,t)$ dos veces con respecto a x ó t , las series resultantes no convergen.

Es posible sumar la serie de la fórmula (4), esto es, representar su suma sin el empleo de series infinitas. Esto simplificará la comprobación de la solución.

Puesto que

$$2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c} = \operatorname{sen} \frac{n\pi(x-at)}{c} + \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+at)}{c}$$

la Ec. (4) puede escribirse

$$(6) \quad y = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi}{c} (x-at) \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi}{c} (x+at) \right]$$

Definamos $F(x)$ para todos los valores reales de x por la serie de senos correspondiente a f :

$$(7) \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Entonces, $F(x)$ es la extensión periódica impar, con período $2c$, de $f(x)$; esto es,

$$(8) \quad \begin{aligned} F(x) &= f(x) && \text{cuando } 0 \leq x \leq c, \\ F(-x) &= -F(x), && F(x+2c) = F(x), && \text{y para } x. \end{aligned}$$

Según la fórmula (7), la fórmula (6) puede escribirse

$$(9) \quad y(x,t) = \frac{1}{2} [F(x-at) + F(x+at)].$$

De este modo, la serie (4) es sumada con la ayuda de la función F definida por las Ecs. (8). La convergencia de las series (6) y (4) se sigue de la convergencia de la serie (7).

Solución establecida. Las condiciones a las que hemos sometido a f son tales que su extensión F es continua para todo valor de x (Fig. 11). De ello resulta que $F(x-at)$ y $F(x+at)$, y, por consiguiente, la función y dada por la fórmula (9) son funciones continuas de x y t para todos los valores de x y t . De cualquiera de las dos fórmulas (4) ó (9) se deduce que $y(0,t) = 0$, $y(c,t) = 0$, $y(x,0) = f(x)$. Obsérvese que cuando $x = c$ en la fórmula (9), se puede escribir $F(c-at) = -F(at-c) = -F(at+c)$. Por tanto $y(c,t) = 0$.

Al ser $F(-x) = -F(x)$, es también $-F'(-x) = -F'(x)$, allí donde exista $F'(x)$, significando la «prima» la derivada con respecto al argumento de F . Por tanto, F' es una función par. Análogamente se comprueba que F'' es una función impar.

En el caso de que f' y f'' sean continuas cuando $0 \leq x \leq c$ y

$$f''(0) = f''(c) = 0$$

entonces $F'(x)$ y $F''(x)$ son continuas para todas las x , como se indica en la Fig. 12. Por tanto,

$$y_t(x,t) = \frac{a}{2} [-F'(x-at) + F'(x+at)],$$

y_t es continua para todos los valores de x y t , e $y_t(x,0) = 0$. Como se hizo notar en la Sec. 20, $F(x-at)$ y $F(x+at)$ satisfacen la ecuación de las ondas (I); por consiguiente, y satisface esa ecuación, así como las condiciones de contorno. La función y dada por la fórmula (9) queda entonces establecida como una solución de nuestro problema de contorno. En el Cap. 10 demostraremos por qué es la única solución posible que, en unión con sus derivadas de primer y segundo orden, es continua para todos los valores de las variables.

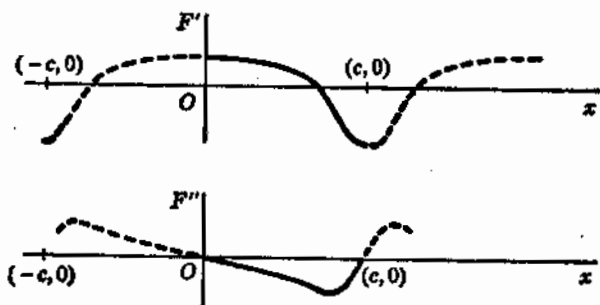


FIG. 12

Si las condiciones a que se someten f' y f'' se hacen menos severas, exigiendo solamente que estas dos funciones sean *casi-continuas*, encontramos que en cada instante t puede haber a lo más un número finito de puntos $x(0 \leq x \leq c)$, donde no existan las derivadas parciales de y . Excepto en esos puntos, nuestra función satisface la ecuación de las ondas y la condición $y_t(x,0) = 0$. Las otras condiciones de contorno quedan satisfechas como antes. En este caso tenemos una solución de nuestro problema de contorno en un sentido más amplio.

57. *Discusión de la solución.* Sea en la fórmula (4) o en su forma modificada (9), se puede ver que para cualquier x fijo el desplazamiento $y(x,t)$ es una función periódica del tiempo t con el período

$$(1) \quad T_0 = \frac{2c}{a}$$

El período es independiente del desplazamiento inicial $f(x)$. Al ser $\alpha^2 = H/\delta$, donde H es la componente horizontal de la tensión y δ es la masa por unidad de longitud, el período varía directamente con la longitud c y con $\sqrt{\delta}$, e inversamente con \sqrt{H} .

Tanto de la fórmula (4) como de la (9) resulta también evidente que, para una longitud dada c y un desplazamiento inicial $f(x)$, el desplazamiento y depende solamente del valor de x y del valor del producto at . Es decir, $y = \phi(x, at)$, donde la función ϕ es la misma función cualquiera que sea el valor de la constante α . Sean a_1 y a_2 valores diferentes de esta constante, e $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ los desplazamientos correspondientes. Entonces

$$(2) \quad y_1(x, t_1) = y_2(x, t_2) \quad \text{si } a_1 t_1 = a_2 t_2 \quad (0 \leq x \leq c).$$

En particular, supongamos que solamente difieren las tensiones, con los valores H_1 y H_2 . La cuerda toma entonces el mismo conjunto de posiciones instantáneas cuando $H = H_1$ que cuando $H = H_2$, pero los tiempos t_1 y t_2 requeridos para alcanzar una determinada posición tienen la relación

$$(3) \quad \frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{H_2}{H_1} \right)^{1/2}.$$

Soluciones aproximadas. Excepto para la condición no-homogénea

$$(4) \quad y(x, 0) = f(x),$$

nuestro problema de contorno queda satisfecho por cualquier suma parcial de la serie infinita (4), Sec. 56,

$$(5) \quad y_N(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c}.$$

En lugar de la condición (4) esta función satisface la condición

$$(6) \quad y_N(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{c}.$$

La suma anterior es la de los N primeros términos de la serie de senos de Fourier de $f(x)$, en el intervalo $(0, c)$. Como la extensión periódica impar de f es continua y f' es casi continua, esta serie converge uniformemente a $f(x)$, como se demostró en el Cap. 5. Por lo tanto, tomando N suficientemente grande puede hacerse a la suma $y_N(x, 0)$

tan aproximada a $f(x)$ como se quiera para todos los valores de x en el intervalo $0 \leq x \leq c$.

La función $y_N(x,t)$, que lo mismo que sus derivadas parciales es continua para todos los valores de x y t , es, por consiguiente, una solución del problema aproximado obtenido reemplazando la condición (4) del problema original por la (6).

Pueden hacerse las correspondientes aproximaciones a otros problemas. Pero un aspecto notable del caso que tratamos es que $y_N(x,t)$ nunca se desvía del desplazamiento real, $y(x,t)$ en más que la mayor desviación de $y_N(x,0)$ con respecto a $f(x)$. Esto es cierto porque

$$y_N = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x-at)}{c} + \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+at)}{c} \right]$$

y esas dos sumas son los N primeros términos de la serie de senos de la extensión periódica impar F de f , con argumentos $x-at$ y $x+at$. Pero la mayor desviación de la primera suma con respecto a $F(x-at)$, o de la segunda con respecto a $F(x+at)$, es la misma que la mayor desviación de $y_N(x,0)$ con respecto a $f(x)$.

PROBLEMAS

1. Una cuerda está tensada entre los puntos fijos $(0,0)$ y $(1,0)$ y se la deja libre a partir de la posición $y = A \operatorname{sen} \pi x$. Hallar la fórmula de los desplazamientos que ocurren $y(x,t)$, y efectuar la comprobación completa de la solución encontrada. Describir el movimiento de la cuerda.

Solución $y = A \operatorname{sen} \pi x \cos \pi at$.

2. Resolver el Prob. 1 cuando el desplazamiento inicial es $y(x,0) = B \operatorname{sen} 2\pi x$.

Solución $y = B \operatorname{sen} 2\pi x \cos 2\pi at$.

3. Demostrar por qué la suma de las dos funciones $y(x,t)$ encontrada en los Probs. 1 y 2 representa los desplazamientos después de que se deja libre la cuerda a partir de la posición $y = A \operatorname{sen} \pi x + B \operatorname{sen} 2\pi x$.

4. Con referencia a la cuerda de longitud c desplazada inicialmente considerada en las Secs. 56 y 57, explicar por qué la frecuencia ν de vibración, en ciclo por unidad de tiempo tiene el valor

$$\nu = \frac{a}{2c} = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{H}{\delta}}$$

Si la tensión es de 200 libras, el peso/pie es 0,01 libras ($g\delta = 0,01$, $g = 32$), y la longitud es de 2 pies, demostrar que $\nu = 200$ ciclos/seg.

5. En la Sec. 56, la posición de la cuerda en cada instante puede mostrarse gráficamente moviendo la gráfica de la función periódica $\frac{1}{2} F(x)$ hacia la derecha con una velocidad a y otra curva idéntica hacia la izquierda con la misma velocidad y sumando las ordenadas, en el intervalo $0 \leq x \leq c$, de las dos curvas así obtenidas en el instante t . Demostrar que esto se deduce de la fórmula (9).

6 Dibujar algunas posiciones de la cuerda pulsada considerada en la Sec. 18 por el método descrito en el Prob. 5 para comprobar que la cuerda toma posiciones tales como las indicadas por las líneas de puntos de la Fig. 13.



FIG. 13

7. Escribir el problema de contorno (1) a (3), Sec. 56, en términos de las dos variables independientes x y τ donde $\tau = at$, para demostrar que el problema en y como función de x, τ no contiene la constante a . De este modo, sin resolver el problema, deducir que la solución tiene

la forma $y = \phi(x, \tau) = \phi(x, at)$ y de aquí que la relación (2), Sec. 57, sigue como consecuencia.

58. Velocidad inicial dada. Si, inicialmente, la cuerda tiene alguna distribución de velocidades $g(x)$, dada de antemano, paralela al eje de las y en su posición de equilibrio $y = 0$, el problema de contorno de los desplazamientos $y(x, t)$ se convierte en

$$\begin{aligned} (1) \quad & y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) & (0 < x < c, t > 0), \\ (2) \quad & y(0, t) = 0, \quad y(c, t) = 0 & (t \geq 0), \\ (3) \quad & y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = g(x) & (0 < x < c). \end{aligned}$$

En el caso de que el plano xy , con la cuerda ocupando el eje de las x , se esté moviendo paralelamente al eje de las y y se le obligue al reposo en el instante $t = 0$, entonces g es una constante. La acción de martillo en un piano puede producir aproximadamente una velocidad inicial uniforme a lo largo de una corta longitud de la cuerda de piano, en cuyo caso g puede considerarse como una función escalón.

Como anteriormente, encontremos las funciones del tipo $X(x)T(t)$ que satisfagan todas las condiciones homogéneas del Prob. (1) a (3). El problema de Sturm-Liouville en X es el mismo que el encontrado cuando el estado inicial dado era el desplazamiento inicial; en consecuencia, $\lambda = n^2\pi^2/c^2$ y $X = \text{sen}(n\pi x/c)$. Las condiciones que debe cumplir T se convierten en

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(0) = 0 \quad (\lambda = n^2\pi^2/c^2);$$

y, por tanto, $T = \text{sen}(n\pi at/c)$. Para satisfacer además las condiciones no-homogéneas, escribiremos, formalmente,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \frac{n\pi x}{c} \text{sen} \frac{n\pi at}{c}, \\ (4) \quad y_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{c} A_n \text{sen} \frac{n\pi x}{c} = g(x) \quad (0 < x < c). \end{aligned}$$

Suponiendo que g y g' son casi-continuas, la serie de la fórmula (4) es la serie de Fourier de senos que representa a $g(x)$ en el intervalo $(0, c)$ si $n\pi a A_n/c = b_n$, donde

$$(5) \quad b_n = \frac{2}{c} \int_0^c g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx.$$

Por tanto, $A_n = b_n c / (n\pi a)$ y

$$(6) \quad y(x, t) = \frac{c}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi a t}{c}.$$

Podemos sumar la serie anterior poniendo primero

$$y_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi a t}{c} = \frac{1}{2} G(x + at) + \frac{1}{2} G(x - at),$$

donde G es la extensión periódica impar, de período $2c$ de la función dada g (comparar con la Sec. 56). Entonces, y por ser $y(x, 0) = 0$,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t G(x + a\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t G(x - a\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_x^{x+at} G(\xi) d\xi - \frac{1}{2a} \int_x^{x-at} G(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

y utilizando la función

$$(7) \quad H(x) = \int_0^x G(\xi) d\xi \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$(8) \quad y(x, t) = \frac{1}{2a} [H(x + at) - H(x - at)].$$

La comprobación de la solución en la forma (8), y la identificación de las funciones definidas por (6) y (8), se dejan para los problemas

Superposición de soluciones. Si se fijan tanto el desplazamiento inicial como la velocidad inicial de la cuerda,

$$(9) \quad y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = g(x),$$

el desplazamiento $y(x,t)$ puede escribirse como superposición de la solución (8) y de la (9), Sec. 56, como sigue

$$(10) \quad y(x,t) = \frac{1}{2} [F(x+at) + F(x-at)] + \frac{1}{2a} [H(x+at) - H(x-at)].$$

Nótese que ambos términos satisfacen las condiciones homogéneas (1) y (2) mientras que su suma satisface claramente la condición no-homogénea (9).

En general, la solución de un problema lineal que contenga más de una condición no-homogénea puede escribirse como suma de soluciones de problemas, cada uno de los cuales contenga una sola condición no-homogénea. La resolución según este método del problema original, aunque no es un paso esencial, simplifica a menudo el proceso de determinar la solución del problema.

59. Ecuaciones diferenciales no-homogéneas. La sustitución de la función incógnita por otra nueva reduce a veces una ecuación en derivadas parciales no-homogéneas a una homogénea. Entonces, si las variables pueden ser separadas, y si las nuevas condiciones de contorno relativas a los dos extremos pueden hacerse homogéneas eligiendo adecuadamente la nueva función de forma que resulte un problema de Sturm-Liouville, nuestro método de superposición puede ser efectivo.

Como ilustración, consideremos los desplazamientos en una cuerda tensa sobre la que actúa una fuerza exterior por unidad de longitud paralela al eje de las y . Supongamos que la fuerza sea proporcional a la distancia a un extremo, y que el desplazamiento inicial y la velocidad son cero. Pueden escogerse las unidades para x y t de modo que el problema tenga la forma

$$(1) \quad y_{tt}(x,t) = y_{xx}(x,t) + Ax \quad (0 < x < 1, t > 0),$$

$$(2) \quad y(0,t) = y(1,t) = y(x,0) = y_t(x,0) = 0.$$

En términos de la nueva función Y , donde

$$y(x,t) = Y(x,t) + \psi(x)$$

y ψ es a determinar, la Ec. (1) se convierte en

$$Y_{tt}(x,t) = Y_{xx}(x,t) + \psi''(x) + Ax$$

que será homogénea si

$$(3) \quad \psi''(x) = -Ax.$$

Las condiciones que debe cumplir Y en los extremos de la cuerda serán

$$Y(0,t) + \psi(0) = 0, \quad Y(1,t) + \psi(1) = 0;$$

homogéneas si

$$(4) \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0.$$

De las condiciones (3) y (4) se deduce que

$$(5) \quad \psi(x) = \frac{A}{6} x(1-x^2) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

El problema de contorno en Y consiste ahora en las condiciones $Y_{tt} = Y_{xx}$, $Y(0,t) = Y(1,t) = 0$, y

$$Y(x,0) = -\psi(x), \quad Y_t(x,0) = 0.$$

Este es un caso especial del problema resuelto en la Sec. 56. La solución del problema puede, pues, escribirse

$$(6) \quad y(x,t) = \psi(x) - \frac{1}{2}[\psi(x-t) + \psi(x+t)],$$

donde $\psi(x)$ está definido para todos los valores finitos de x como extensión periódica impar de ψ de período 2.

60. Barra elástica. Una barra cilíndrica de longitud natural c se alarga inicialmente una longitud bc (Fig. 14) y se deja libre. Los des-

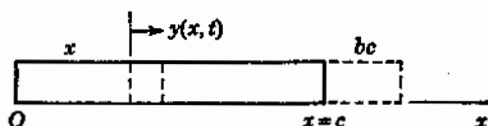


FIG. 14

plazamientos longitudinales iniciales de sus secciones son entonces proporcionales a su distancia al extremo fijo. En el momento $t = 0$, se sueltan ambos extremos y se dejan libres. El problema de contorno en los desplazamientos longitudinales $y(x,t)$ es (Sec. 5)

$$(1) \quad y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t) \quad (0 < x < c, t > 0; a^2 = E/\delta),$$

$$(2) \quad y_x(0,t) = 0, \quad y_x(c,t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$(3) \quad y(x,0) = bx, \quad y_t(x,0) = 0 \quad (0 < x < c).$$

Las condiciones de contorno homogéneas relativas a los puntos O y C (2) indican que la fuerza por unidad de área $E \partial y / \partial x$ sobre las secciones extremas es cero.

Las funciones $X(x)T(t)$ satisfacen todas las condiciones homogéneas indicadas cuando X es una autofunción del problema

$$(4) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(c) = 0,$$

y cuando, para el mismo autovalor λ ,

$$(5) \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T'(0) = 0.$$

El problema de Sturm-Liouville (4) genera las autofunciones utilizadas en la serie de Fourier de cosenos en el intervalo $(0, c)$. Los autovalores, todos reales, son $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = n^2 \pi^2 / c^2$, $n = 1, 2, \dots$; además, $X_0(x) = 1$, $T_0(t) = 1$, y

$$X_n(x) = \cos(n\pi x/c), \quad T_n(t) = \cos(n\pi at/c).$$

Así, pues, formalmente, la combinación lineal generalizada

$$y(x, t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c}$$

satisface todas las condiciones (1) a (3) supuesto que

$$(6) \quad bx = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{c} \quad (0 < x < c).$$

La función bx es tal que está representada por su serie de Fourier de cosenos en el intervalo $0 \leq x \leq c$, donde

$$a_n = \frac{2b}{c} \int_0^c x \cos \frac{n\pi x}{c} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

de donde resulta $a_0 = bc$, $a_n = -2bc[1 - (-1)^n]/(n\pi)^2$; y de aquí

$$(7) \quad y(x, t) = \frac{1}{2} bc - \frac{4bc}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{c} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{c}.$$

Si $P(x)$ designa la extensión periódica *par*, de período $2c$, de la función bx ($0 \leq x \leq c$), la fórmula (7) puede escribirse

$$(8) \quad y(x, t) = \frac{1}{2} [P(x + at) + P(x - at)].$$

Esta reducción, y la comprobación de la solución en la forma (8) quedan como ejercicios.

PROBLEMAS

1. Demostrar que para cada valor fijo de x , los desplazamientos y dados por la fórmula (10), Sec. 58, son funciones periódicas de t de período $2c/a$.

2. Demostrar que el movimiento de cualquier sección transversal de la barra elástica considerada en la Sec. 60 es periódico en t de período $2c/a$.

3. Una cuerda tensa entre los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ se encuentra inicialmente recta con velocidad $y_t(x,0) = b \operatorname{sen} x$. Escribir el problema de contorno en $y(x,t)$ resolverlo y comprobar la solución.

Solución $y = a^{-1}b \operatorname{sen} x \operatorname{sen} at$.

4. Un alambre estirado entre los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ de un eje de las x horizontal se encuentra inicialmente en reposo a lo largo de dicho eje. Su movimiento posterior es originado por la fuerza de la gravedad. Si el eje de las y es positivo hacia arriba, la ecuación del movimiento es $y_{tt} = \alpha^2 y_{xx} - g$, donde g es la aceleración de la gravedad. Escribir el problema de contorno en los desplazamientos verticales $y(x,t)$ y resolverlo.

demostrar que

$$y(x,t) = \psi(x) - \frac{1}{2}[\Psi(x-at) + \Psi(x+at)],$$

donde la función Ψ es la extensión periódica impar, de período 2, de la función

$$\psi(x) = \frac{g}{2\alpha^2} x(x-1) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

5. Con referencia a la Sec. 58, cuando todos los puntos de la cuerda tienen la misma velocidad inicial, $g(x) = v_0$, mostrar gráficamente las funciones periódicas $G(x)$ y $H(x)$ y observar que las posiciones instantáneas de la cuerda dadas por la fórmula (8) son líneas quebradas semejantes a las posiciones mostradas en la Fig. 13.

6. Comprobar la solución (8), Sec. 58. Observar que la función H definida por la Ec. (7) es continua, par y periódica y que $H'(x) = G(x)$ allí donde G sea continua.

7. En la Sec. 58, vimos que

$$G(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{c} \quad (-\infty < r < \infty).$$

Integrar esta serie (Sec. 48) para demostrar que

$$H(x) = \frac{c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} b_n \left(1 - \cos \frac{n\pi x}{c}\right) \quad (-\infty < x < \infty)$$

y de aquí, que la función (8) está representada por la serie (6).

8. En la Sec. 60, reducir la representación (7) de la función y a la forma (8) y comprobar la solución.

9. Partiendo de la fórmula (8), Sec. 60, demostrar que $y(0,t) = P(at)$ que por tanto, el extremo $x = 0$ de la barra se mueve con velocidad constante ab

durante el semiperíodo $0 < t < c/a$ y con velocidad $-ab$ durante el semiperíodo siguiente.

10. Si la función y que satisface las condiciones (1) a (3). Sec. 60, se interpreta como representación de los desplazamientos transversales en una cuerda tensa, donde $a^2 = H/\delta$, describir las condiciones inicial y final para la cuerda (Obsérvese que las condiciones (2) implican que en los extremos no actúan fuerzas verticales, como si los extremos estuvieran enlazados alrededor de guías perfectamente lisas a lo largo de las rectas $x = 0$ y $x = c$).

61. **Temperaturas de una barra.** La superficie lateral de un cilindro recto, sólido, de longitud π , se encuentra aislada. La distribución inicial de temperaturas en el interior de la barra es una función dada f de la distancia x desde la base $x = 0$. En el instante $t = 0$, la temperatura de ambas bases $x = 0$ y $x = \pi$ se lleva a cero y se conserva en este valor (Fig. 15). Si no se genera calor en el sólido

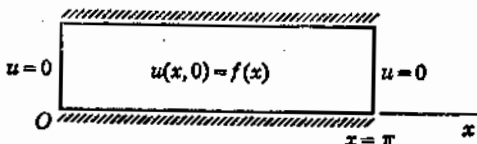


FIG. 15

las temperaturas deben tener los valores de una función $u(x,t)$ que satisfaga la ecuación del calor

$$(1) \quad u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad (0 < x < \pi, t > 0)$$

y las condiciones de contorno

$$(2) \quad u(+0,t) = 0, \quad u(\pi - 0,t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$(3) \quad u(x, +0) = f(x) \quad (0 < x < \pi).$$

La constante k es la difusividad del material. Hemos escrito las condiciones de contorno como límites con objeto de indicar las propiedades de continuidad que deben ser satisfechas por u . El problema es también el de determinar las temperaturas $u(x,t)$ en un paralelepípedo limitado por los planos $x = 0$ y $x = \pi$, inicialmente a la temperatura $f(x)$, con sus caras conservadas a la temperatura cero.

Por separación de variables se encuentra que $\bar{X}(x)T(t)$ satisface las condiciones homogéneas (1) y (2) si

$$(4) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0,$$

$$(5) \quad T'(t) = -\lambda k T(t).$$

El problema de Sturm-Liouville (4) tiene los autovalores $\lambda = n^2$ y las autofunciones $\text{sen } nx$ ($n = 1, 2, \dots$). Las funciones T correspondientes son, según (5), $\exp(-n^2 kt)$. Formalmente entonces, la función

$$(6) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-n^2 kt) \text{sen } nx$$

satisface todas las condiciones, incluyendo la (3), si

$$(7) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } nx \quad (0 < x < \pi).$$

Supongamos que f y f' son casi-continuas. Entonces, f está representada por su serie de Fourier de senos (7), donde

$$(8) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen } nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La fórmula (6) con los coeficientes b_n definidos por la Ec. (8) es nuestra solución formal del problema de contorno.

a. Verificación. Ya hemos visto anteriormente que $b_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y, por tanto, esos coeficientes están acotados para todas las n , $|b_n| < M$, donde M es alguna constante. Siempre que $t \geq t_0$ donde t_0 es una constante positiva,

$$|b_n \exp(-n^2 kt) \text{sen } nx| < M \exp(-n^2 kt_0).$$

Como la serie infinita de términos constantes $\exp(-n^2 kt_0)$ converge, según el criterio del cociente, el criterio de Weierstrass asegura la convergencia uniforme de la serie (6) con respecto a x y t cuando $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq t_0 > 0$. Los términos de esa serie son funciones continuas y, por tanto, la serie (6) converge a una función continua $u(x,t)$ cuando $t \geq t_0$, esto es, siempre que $t > 0$, ya que t_0 es un número positivo arbitrario. En particular, $u(+0,t) = u(0,t)$ cuando $t > 0$, y como $u(0,t) = 0$, la primera de las condiciones (2) queda satisfecha por la función u definida por la fórmula (6). Análogamente, la segunda de aquellas condiciones queda satisfecha.

La serie de términos $n \exp(-n^2 kt_0)$, ó $n^2 \exp(-n^2 kt_0)$, también converge. Por tanto, la serie (6) puede ser derivada dos veces con respecto a x y una vez con respecto a t , cuando $t > 0$ porque la serie de derivadas converge uniformemente cuando $t \geq t_0$. Pero como los términos de la serie (6) satisfacen la ecuación del calor (1), resulta

que la suma $u(x,t)$ de la serie satisface esa ecuación diferencial homogénea.

Queda por demostrar que u satisface la condición inicial (3). Esto puede hacerse con la ayuda de un criterio de convergencia debido a Abel¹, que se deduce en el Cap. 10. Para cualquier valor fijo de x ($0 < x < \pi$) la serie de términos $b_n \sin nx$ converge a $f(x)$: en un punto de discontinuidad definimos $f(x)$ como la media de los valores $f(x+0)$ y $f(x-0)$. Según el criterio de Abel, la nueva serie formada multiplicando los términos de una serie convergente por los correspondientes miembros de una sucesión acotada de funciones de t , tal como $\exp(-n^2 kt)$, cuyos valores nunca aumentan con n , es uniformemente convergente con respecto a t . Nuestra serie (6) converge, por tanto, uniformemente, con respecto a t cuando $t \geq 0$.

Resulta, pues, que nuestra función u es continua en t ($t \geq 0$) y, por tanto, $u(x, +0) = u(x, 0)$. Como $u(x, 0) = f(x)$, la condición (3) queda satisfecha. La función u definida por (6) queda establecida como una solución.

b. Unicidad. Consideremos el caso algo especial en el que f es continua ($0 \leq x \leq \pi$), $f(0) = f(\pi) = 0$ y f' es casi-continua de modo que la serie de Fourier de senos (7) converge uniformemente a $f(x)$. Entonces, el criterio de Abel muestra la convergencia uniforme de la serie (6) con respecto al par de variables x y t en la región $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$. En consecuencia, nuestra función u es continua en esa región. Como anteriormente, u_t , u_x y u_{xx} son continuas cuando $t > 0$ y $0 \leq x \leq \pi$.

En el Cap. 10 se demuestra un sencillo teorema de unicidad para soluciones de tales problemas de contorno. Expresa que solamente una función $U(x,y,z,t)$ puede satisfacer la ecuación del calor en todo el interior de una región cerrada R en el espacio, tal como nuestra región cilíndrica, y cumplir las siguientes exigencias: U ha de ser una función continua del conjunto de variables x,y,z,t cuando $t \geq 0$ y cuando (x,y,z) está en R , donde R incluye la superficie contorno; las derivadas de U que aparecen en la ecuación del calor son continuas en R cuando $t > 0$; U está prescrita en parte del contorno y la derivada normal de U en el resto cuando $t > 0$.

Nuestra función $u(x,t)$, que es independiente de y y z , satisface todas esas exigencias, incluso las condiciones (1) a (3). Para cada valor fijo de t el gradiente de u es paralelo al eje de la x , de modo que la derivada normal de u en la superficie lateral del cilindro, o el flujo calorífico a través de esa superficie, es cero. Por tanto, la fórmula (6) representa la solución de nuestro problema que satisface las condi-

¹ Niels H. Abel, noruego, 1802-1829.

ciones de continuidad enunciadas. Queda, pues, justificada la suposición de que u es función de x y t solamente.

62. Otras condiciones de contorno. Indicaremos modificaciones del procedimiento que resultan útiles cuando el paralelepípedo $0 \leq x \leq \pi$, o la barra con superficie lateral aislada, se sujeta a otras condiciones térmicas sencillas en sus superficies límite $x = 0$ y $x = \pi$. En cada caso la función de temperaturas ha de satisfacer la ecuación del calor en x y t dentro del paralelepípedo.

$$(1) \quad u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad (0 < x < \pi, t > 0).$$

a. Una cara a la temperatura u_0 . Si el paralelepípedo se encuentra inicialmente a la temperatura cero en todo su volumen y la cara $x = 0$ se conserva a esa temperatura mientras la cara $x = \pi$ se conserva a una temperatura constante u_0 cuando $t > 0$, entonces,

$$(2) \quad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = u_0, \quad u(x,0) = 0.$$

El problema de contorno que consiste en las Ecs. (1) y (2) no está en la forma apropiada para la aplicación del método de separación de variables, porque una de las condiciones de contorno relativas a los puntos límites no es homogénea. Si escribimos

$$v(x,t) = u(x,t) - \psi(x),$$

encontramos que cuando $\psi(x) = u_0 x/\pi$ (la temperatura estacionaria en este paralelepípedo), el problema en v toma la forma

$$(3) \quad v_t = kv_{xx}, \quad v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \quad v(x,0) = -\psi(x).$$

Este es un caso especial del problema resuelto en la Sec. 61, donde $f(x) = -u_0 x/\pi$. Obtenemos así la fórmula

$$(4) \quad u(x,t) = \frac{u_0}{\pi} \left[x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp(-n^2 kt) \operatorname{sen} nx \right].$$

b. Caras aisladas. El flujo calorífico a través de las caras $x = 0$ y $x = \pi$ es el valor de $-Ku_x$ en esas caras, donde K es la conductividad térmica. Si ambas caras del paralelepípedo están aisladas y la temperatura inicial es $f(x)$, el problema de contorno consiste en la Ec. (1) y las condiciones

$$(5) \quad u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x) \quad (0 < x < \pi).$$

Por medio de una separación de variables se llega al problema de Sturm-Liouville asociado con la serie de Fourier de cosenos,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0,$$

y a la ecuación $T'(t) = -\lambda kT(t)$. La función de temperaturas resulta ser

$$(6) \quad u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 kt) \cos nx,$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

c. Una cara aislada. Si la cara $x = \pi$ está aislada, mientras que

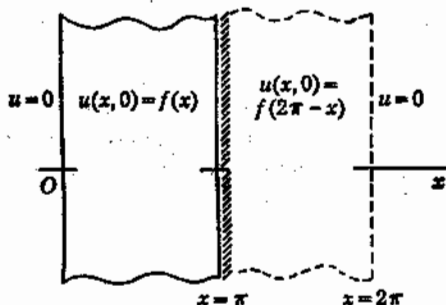


FIG. 16

la cara $x = 0$ se conserva a temperatura cero (Fig. 16), entonces

$$(7) \quad u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = fx \quad (0 < x < \pi),$$

donde $f(x)$ es la temperatura inicial. Por separación de variables se obtiene el problema de Sturm-Liouville

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad (X'(\pi) = 0$$

y la ecuación $T'(t) = -\lambda kT(t)$. Los autovalores y autofunciones normalizadas de ese problema resultan ser

$$(8) \quad \lambda_n = \frac{1}{4}(2n-1)^2, \quad \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)x}{2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Obsérvese que en este caso las funciones seno ortogonales *no* son las usadas en la serie de Fourier de senos para el intervalo $(0, \pi)$.

Nuestra combinación lineal generalizada de funciones del tipo XT , escrita en términos de las funciones ϕ_n es

$$(9) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp \left[-\frac{1}{4} (2n-1)^2 kt \right] \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)x}{2}$$

que satisface la condición $u(x, 0) = f(x)$ si

$$(10) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)x}{2} \quad (0 < x < \pi).$$

La serie (10) es la serie de Fourier generalizada correspondiente a f con respecto a las autofunciones ϕ_n si

$$(11) \quad c_n = \int_0^{\pi} f(x) \phi_n(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n-1)x}{2} dx.$$

Si aceptamos que la representación (10) es válida, como se probó en referencias a la teoría de Sturm-Liouville citada en la Sec. 32, la fórmula (9) con coeficientes c_n definida por (11) representa una solución formal de nuestro problema.

Pero podemos de hecho establecer la representación especial (10) con ayuda de la serie de Fourier de senos en el intervalo mayor $(0, 2\pi)$. Supongamos que la función dada f y su derivada f' sean casi continuas en el intervalo $(0, \pi)$, que f está definida en $(\pi, 2\pi)$ de modo que su gráfica sea simétrica con respecto a la recta $x = \pi$; esto es

$$(12) \quad f(x) = f(2\pi - x) \quad \text{cuando } \pi < x < 2\pi.$$

Este procedimiento es sugerido por consideración del problema de las temperaturas en el paralelepípedo que termina en el plano $x = 2\pi$ y que en este plano se conserva a la temperatura cero (Fig. 16). Cuando la distribución inicial de temperaturas tiene la propiedad de simetría (12), no hay paso de flujo calorífico a través de la sección media $x = \pi$, de modo que la función de temperaturas u debe ser la que se busca cuando $0 \leq x \leq \pi$. El nuevo problema es esencialmente el resuelto en la Sec. 61 con la diferencia de que la que ahora ha de emplearse es la serie de senos en el intervalo $(0, 2\pi)$ de la extensión simétrica de f .

Esta representación por serie de senos en $(0, c)$, donde $c = 2\pi$ es

$$(13) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{nx}{2} \quad (0 < x < 2\pi),$$

donde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{nx}{2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{n\xi}{2} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(2\pi - x) \operatorname{sen} \frac{nx}{2} dx. \end{aligned}$$

En la última integral sustituimos ξ por $2\pi - x$, y observando que entonces $\operatorname{sen}(nx/2)$ se convierte en $-(-1)^n \operatorname{sen}(n\xi/2)$, se tiene

$$b_n = \frac{1}{\pi} [1 - (-1)^n] \int_0^{\pi} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{n\xi}{2} d\xi;$$

esto es,

$$(14) \quad b_{2n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\xi}{2} d\xi, \quad b_{2n} = 0.$$

La representación (13) con coeficientes (14) es, por tanto, válida para la función dada f en el intervalo $(0, \pi)$. Es la misma que la representación (10) con los coeficientes (11).

PROBLEMAS ¹

1. Las caras $x = 0$ y $x = c$ de un paralelepípedo que se encuentra inicialmente a las temperaturas $f(x)$ se conservan a temperatura cero (Comparar con la Sec. 61). Deducir la fórmula de temperaturas

$$u(x, t) = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{c^2}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \int_0^c f(\xi) \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{c} d\xi.$$

2. Cuando la distribución inicial de temperaturas es uniforme en el paralelepípedo del Prob. 1, $f(x) = u_0$, escribir la fórmula que da $u(x, t)$ y la que da el flujo $-k u_x(x_0, t)$ a través de un plano $x = x_0$ ($0 \leq x_0 \leq c$, $t > 0$) y observar que no pasa flujo calorífico a través del plano central $x = c/2$.

3. Si $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x/c)$ en el Prob. 1, determinar $u(x, t)$ y verificar por completo el resultado

$$\text{Solución } u = \exp(-\pi^2 kt/c^2) \operatorname{sen}(\pi x/c).$$

¹ En estos problemas y en los que siguen, no se piden más que soluciones formales de los problemas de contorno, a menos que el problema indique que la solución ha de verificarse por completo. A veces una verificación parcial resulta fácil y conveniente.

4. (a) Si en el Prob. 1, $f(x) = A$ cuando $0 < x < \frac{1}{2}c$ y $f(x) = 0$ cuando $\frac{1}{2}c < x < c$, demostrar que

$$u(x,t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi/4)}{n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{c^2}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}$$

(b) Dos paralelepípedos de hierro ($k = 0,15$ unidad c.g.s.) de 20 cm. de espesor, uno a la temperatura 100°C y el otro a 0°C , se colocan cara a cara en perfecto contacto, y sus caras exteriores se mantienen a 0°C . Calcular la temperatura en su cara común 10 minutos después de comenzar el contacto, que debe resultar 37°C aproximadamente.

(c) Si los paralelepípedos indicados en (b) son de cemento ($k = 0,005$ unidad c.g.s.) demostrar que serán necesarias cinco horas para que la cara común alcance la temperatura de 37°C . (Obsérvese que $u(x,t)$ depende del producto kt).

5. Las caras $x = 0$ y $x = c$ de un paralelepípedo que se encuentra inicialmente a las temperaturas $f(x)$ están aisladas. (Comparar con Sec. 62b). Deducir la fórmula de las temperaturas

$$u(x,t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{c^2}\right) \cos \frac{n\pi x}{c}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \cos \frac{n\pi x}{c} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Obsérvese que si $f(x) = u_0$ constante, entonces $u(x,t) = u_0$.

6. Establecer el resultado del Prob. 5 (comparar con la Sec. 61 a).

7. Sea $v(x,t)$ la distribución de temperaturas en un alambre delgado con su eje a lo largo del eje de las x . Se desprecian las variaciones de temperatura existentes en cada Sección transversal. Se supone que en la superficie lateral

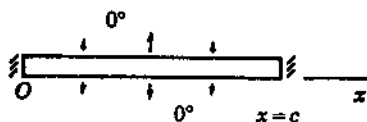


FIG. 17

la transmisión de calor entre el alambre y el medio ambiente se verifica según la ley lineal (Prob. 7, Sec. 7). Si el medio ambiente está a la temperatura cero, se tiene

$$v_t(x,t) = kv_{xx}(x,t) - hv(x,t) \quad (h \text{ constante, } h > 0)$$

Si los extremos $x = 0$ y $x = c$ están aislados (Fig. 17) y la distribución inicial de temperatura es $f(x)$, resolver el problema de contorno para v y demostrar que

$$v(x,t) = e^{-ht} u(x,t)$$

donde u es la función de temperatura encontrada en el Prob. 5.

8. Utilizar la sustitución $u(x,t) = e^{-ht} v(x,t)$ para reducir el problema de contorno del Prob. 7 al del Prob. 5.

9. Si los extremos de alambre del Prob. 7 no están aislados, sino mantenidos a la temperatura cero, hallar la función de temperatura.

10. En un paralelepípedo se genera calor de forma constante (proporcionalmente al volumen del elemento y al tiempo) en todo su volumen. Se encuentra inicialmente a las temperaturas $f(x)$ y sus caras $x = 0$ y $x = \pi$ se mantienen a la temperatura cero. Entonces la ecuación del calor tiene la forma (Sec. 7).

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t) + C,$$

donde C es una constante positiva. Resolver el problema de contorno para obtener la fórmula de las temperaturas

$$u(x,t) = \frac{Cx}{2k}(\pi - x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-n^2 kt) \operatorname{sen} nx,$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{Cx}{2k}(x - \pi) + f(x) \right] \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Obsérvese además el resultado cuando $f(x) = \frac{1}{2} Cx(\pi - x)/k$.

11. Resolver el siguiente problema de contorno para

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) - hu(x,t) & (0 < x < \pi, t > 0; h \text{ constante, } h > 0), \\ u(0,t) &= 0, \quad u(\pi,t) = 1 & (t > 0), \\ u(x,0) &= 0 & (0 < x < \pi). \end{aligned}$$

$$\text{Solución } u(x,t) = \frac{\operatorname{sen} x \sqrt{h}}{\operatorname{sen} \pi \sqrt{h}} + \frac{2}{\pi} e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2 + h} \exp(-n^2 t) \operatorname{sen} nx.$$

12. Emplear la superposición de soluciones conocidas (Secs. 61 y 62) para escribir una fórmula para las temperaturas en un paralelepípedo cuyas caras $x = 0$ y $x = \pi$ se mantienen a temperaturas 0 y u_0 respectivamente, y cuya distribución inicial de temperaturas es $f(x)$.

13. La cara $x = 0$ de un paralelepípedo se mantiene a la temperatura cero, mientras que en la otra cara $x = \pi$ se suministra o extrae calor proporcionalmente al área de modo que $u_x(\pi,t) = A$. Si el paralelepípedo se encuentra inicialmente a la temperatura cero, y si la unidad de tiempo se elige de modo que se pueda escribir $k = 1$ deducir la fórmula de las temperaturas

$$u(x,t) = Ax + \frac{8A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \exp\left[-\frac{(2n-1)^2 t}{4}\right] \operatorname{sen} \frac{(2n-1)x}{2}$$

con ayuda de la representación por series (10), Sec. 62.

14. Sean f y f' dos funciones casi-continuas en un intervalo $(0,c)$. Utilizando el procedimiento seguido en la Sec. 62c, establecer la representación

$$f(x) = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2c} \int_0^c f(\xi) \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi \xi}{2c} d\xi \quad (0 < x \leq c)$$

de f por medio de las series de las autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(c) = 0.$$

63. Un problema de Dirichlet. Sea u una función armónica en el interior de un rectángulo del plano xy

$$(1) \quad u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad (0 < x < a, 0 < y < b)$$

y a la que se prescribe como valores en el contorno (Fig. 18):

$$(2) \quad u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0 \quad (0 < y < b),$$

$$(3) \quad u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = 0 \quad (0 < x < a).$$

Una separación de variables conduce al problema de Sturm-Liouville

$$(4) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(a) = 0,$$

donde $\lambda = n^2\pi^2a^{-2}$ y $X_n = \text{sen}(n\pi x/a)$, $n = 1, 2, \dots$, y

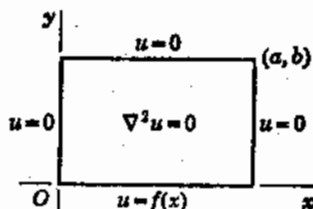


FIG. 18

a las condiciones

$$(5) \quad Y''(y) - n^2\pi^2a^{-2}Y(y) = 0, \quad Y(b) = 0.$$

Por tanto, Y puede escribirse como $\text{senh}[n\pi a^{-1}(b-y)]$. La función

$$(6) \quad u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a} \text{sen} \frac{n\pi x}{a}$$

satisface formalmente todas las condiciones (1) a (3), si

$$(7) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{senh} \frac{n\pi b}{a} \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \quad (0 < x < a).$$

Suponemos que f y f' son casi-continuas. Entonces la fórmula (7) es la serie de Fourier de senos que representa a f en el intervalo $(0,a)$ supuesto que $A_n \text{senh}(n\pi b/a) = b_n$, donde

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{a} dx.$$

La función definida por la Ec. (6) con coeficientes

$$(8) \quad A_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx$$

es, por consiguiente, nuestra solución formal. El resultado puede establecerse por el método empleado en la Sec. 61. Dejaremos la verificación de la solución para el Cap. 10, donde también se considerará la cuestión de unicidad.

Si en el problema y solución anteriores se reemplaza y por la nueva variable $b - y$, y f por g , la condición no-homogénea satisfecha por u se convierte en $u(x, b) = g(x)$. El intercambio de x e y sitúa a las condiciones no-homogéneas en los límites $x = 0$ ó $x = a$. La superposición de las cuatro soluciones da entonces la función armónica cuyos valores están prescritos como una función de la posición a lo largo de todo el contorno del rectángulo.

En las condiciones (1) a (3) se advierte que $u(x, y)$ representa las *temperaturas estacionarias* en una placa rectangular con caras aisladas cuando $u = f(x)$ en la arista $y = 0$ y $u = 0$ en las otras tres aristas. La función u representa también el *potencial electrostático* en el espacio limitado por los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$ cuando el espacio está libre de cargas y los planos que forman el contorno se conservan a potenciales dados por las condiciones (2) y (3). Si f es continua y $f(0) = f(a) = 0$, $u(x, y)$ representan los *desplazamientos transversales estáticos en una membrana* estirada en un bastidor rectangular después que el lado soporte de la membrana $y = 0$ ha sido desplazado, $u(x, 0) = f(x)$.

64. Series de Fourier con dos variables. Designemos por $z(x, y, t)$ el desplazamiento transversal en el punto (x, y) y momento t en una membrana estirada en un bastidor rígido de forma cuadrada situado en el plano xy . Para simplificar la notación tomemos al origen y al punto (π, π) como extremos de una diagonal del bastidor. Si se deja libre a la membrana con un desplazamiento inicial dado $f(x, y)$, donde f es continua y se anula en el contorno del cuadrado, se tiene

$$(1) \quad z_{tt} = a^2(z_{xx} + z_{yy}) \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi, t > 0),$$

$$(2) \quad z(0, y, t) = z(\pi, y, t) = z(x, 0, t) = z(x, \pi, t) = 0,$$

$$(3) \quad z(x, y, 0) = f(x, y), \quad z_t(x, y, 0) = 0 \\ (0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi).$$

Supongamos que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son también continuas.

Las funciones del tipo XYT satisfacen la Ec. (1) si

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

En este caso se tiene $X''/X = -\lambda$ e $Y''/Y = T''/(a^2 T) + \lambda$, donde λ es una constante; además, $Y''/Y = -\mu$ y $T''/(a^2 T) + \lambda = -\mu$ donde la constante μ es independiente de λ . Una separación de variables en todas las condiciones homogéneas lleva, por tanto, a los dos problemas de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & X(0) &= X(\pi) = 0, \\ Y''(y) + \mu Y(y) &= 0, & Y(0) &= Y(\pi) = 0 \end{aligned}$$

y a las condiciones

$$T''(t) + a^2(\lambda + \mu)T(t) = 0, \quad T'(0) = 0.$$

Por consiguiente, $\lambda = m^2$ ($m = 1, 2, \dots$), $X = \text{sen } mx$, $\mu = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), $Y = \text{sen } ny$, y $T = \cos(at\sqrt{m^2 + n^2})$.

La solución formal de nuestro problema es, pues,

$$(4) \quad z(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \text{sen } mx \text{ sen } ny \cos(at\sqrt{m^2 + n^2})$$

si los coeficientes A_{mn} pueden ser determinados de modo que

$$(5) \quad f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \text{sen } mx \text{ sen } ny$$

cuando $0 \leq x \leq \pi$ y $0 \leq y \leq \pi$. Agrupando términos en esta serie doble de senos de forma que se ponga de manifiesto el coeficiente total de $\text{sen } mx$ para cada m , se puede escribir, formalmente,

$$(6) \quad f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \text{sen } ny \right) \text{sen } mx.$$

Para cada valor fijo de y ($0 \leq y \leq \pi$) la Ec. (6) es la serie de Fourier de senos que representa a la función $f(x, y)$ de la variable x ($0 \leq x \leq \pi$), supuesto que los coeficientes de $\text{sen } mx$ sean los de la

serie de Fourier de senos; esto es,

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} ny = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, y) \operatorname{sen} m\xi \, d\xi.$$

Aquí, el segundo miembro es una sucesión de funciones $F_m(y)$, $m = 1, 2, \dots$, cada una de las cuales está representada por su serie de Fourier de senos (7) en el intervalo $(0, \pi)$ si

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F_m(\eta) \operatorname{sen} n\eta \, d\eta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Los coeficientes tienen, por tanto, los valores

$$(8) \quad A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \eta) \operatorname{sen} m\xi \operatorname{sen} n\eta \, d\xi \, d\eta.$$

La Ec. (4), con los coeficientes definidos por la fórmula (8) proporciona una solución formal a nuestro problema de la membrana.

Como los números $\sqrt{m^2 + n^2}$ no cambian por múltiplos enteros de algún número fijo cuando m y n varían tomando valores enteros, las funciones coseno de la fórmula (4) no tienen período común con respecto a la variable t , de modo que el desplazamiento z no es, en general, una función periódica de t . Por consiguiente, la membrana vibrante, en contraste con la cuerda vibrante, no produce generalmente una nota musical. Puede, sin embargo, conseguirse que la produzca si se le da un desplazamiento inicial adecuado. Si, por ejemplo,

$$z(x, y, 0) = A \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$

los desplazamientos (4) están dados por un único término

$$z(x, y, t) = A \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(a\sqrt{2}t);$$

y entonces z es periódica en t con período $\pi\sqrt{2}/a$.

PROBLEMAS

1. Una arista de una placa cuadrada con caras aisladas se conserva a una temperatura uniforme u_0 , y las otras tres aristas se conservan a la temperatura cero. Sin resolver un problema de contorno, sino por superposición de soluciones de problemas análogos para obtener el caso trivial en el que las cuatro aristas se conservan a la temperatura u_0 , indicar por qué la temperatura estacionaria en el centro de la placa dada debe ser $u_0/4$.

2. Una placa cuadrada tiene aisladas sus caras y sus aristas $x = 0$ y $x = \pi$ ($0 < y < \pi$). Sus aristas $y = 0$ e $y = \pi$ se conservan a la temperatura cero

y $f(x)$, respectivamente. Deducir la siguiente fórmula para las temperaturas estacionarias

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} a_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh ny}{\sinh n\pi} \cos nx,$$

donde
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Observar el resultado cuando f es una constante, $f(x) = u_0$.

3. Determinar la función armónica $u(x,y)$ en la banda semi-infinita $0 < x < \pi$, $y > 0$ tal que

$$\begin{aligned} u(0,y) = u(\pi,y) &= 0 & (y > 0), \\ u(x,0) &= 1 & (0 < x < \pi), \end{aligned}$$

y $|u(x,y)| < M$, donde M es alguna constante (Esta exigencia de acotabilidad sirve como condición en el ausente contorno superior de la banda)

$$\text{Solución } u = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-(2n-1)y] \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

4. Conocido que el coeficiente imaginario de $\log(a + ib)$ es $\text{arc tang}(b/a)$ cuando a y b son números reales y que

$$(a) \quad \log \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} z^{2n-1} \quad (|z| < 1),$$

escribir $z = e^{-ye^{ix}}$ ($y > 0$) e igualar los componentes imaginarios del desarrollo (a) para indicar que la respuesta al Prob. 3 puede escribirse

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \text{arctg} \frac{\sin x}{\sinh y} \quad (0 < x < \pi, y > 0).$$

Verificar esta forma de la solución.

5. Deducir la fórmula para las temperaturas estacionarias $u(x,y)$ en una pared semi-infinita $0 < x < c$, $y > 0$ si las caras planas $x = 0$ y $x = c$ están aisladas y $u(x,0) = f(x)$, donde f y f' son casi-continuas ($0 < x < c$) y si $u(x,y)$ ha de estar acotada.

6. Las cuatro caras de un prisma rectangular infinitamente largo limitado por los planos $x = 0$, $x = b$, $y = 0$ e $y = c$ se mantienen a la temperatura cero. Si la distribución inicial de temperaturas es $f(x,y)$, deducir la siguiente fórmula para las temperaturas $u(x,y,t)$ en el prisma:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \exp \left[-\pi^2 kt \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{c},$$

donde
$$B_{mn} = \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{c} \, dx \, dy.$$

7. En el caso de que en el Prob. 6 sea $f(x,y) = g(x)h(y)$, demostrar que la serie doble que da u se reduce al producto de dos series

$$u(x,y,t) = v(x,t)w(y,t)$$

y obsérvese que v y w representan temperaturas en los paralelepípedos $0 \leq x \leq b$ y $0 \leq y \leq c$ con sus caras a la temperatura cero y con temperaturas iniciales $g(x)$ y $h(y)$ respectivamente.

8. Si $v(x,t)$ y $w(y,t)$ satisfacen la ecuación del calor para un flujo unidimensional, $v_t = kv_{xx}$, $w_t = kw_{yy}$, demostrar por derivación que su producto $u = vw$ satisface la ecuación del calor $u_t = k(u_{xx} + u_{yy})$. Utilizar este hecho para llegar a la solución del Prob. 7.

65. Una aplicación de las integrales de Fourier. La cara $x = 0$ de un sólido semi-infinito $x \geq 0$ se mantiene a la temperatura cero (Fig. 19). Tratemos de hallar las temperaturas $u(x,t)$ en el sólido cuando la distribución inicial de temperaturas es $f(x)$, suponiendo ahora que f y f' son casi continuas en cualquier intervalo finito y que f está acotada y es absolutamente integrable a lo largo del semi-eje positivo de las x .

Si se considera al sólido como un caso límite de un paralelepípedo $0 \leq x \leq c$ cuando c aumenta, parece necesaria alguna condición rela-

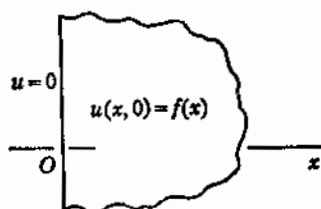


Fig. 19

tiva a las condiciones térmicas en la cara $x = c$ de otro modo, la temperatura en esa cara podría aumentar de una forma cualquiera al aumentar c . Exigiremos que nuestra función u esté acotada, condición que implica también que no exista fuente instantánea de calor en la cara $x = 0$ en el momento $t = 0$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) && (x > 0, t > 0), \\ (2) \quad & u(0,t) = 0 && (t > 0), \\ & |u(x,t)| < M && (x > 0, t > 0), \end{aligned}$$

donde M es alguna constante, y

$$(3) \quad u(x,0) = f(x) \quad (x > 0).$$

En general, las combinaciones lineales de funciones XT no estarán acotadas a menos que las mismas X y T lo estén. Por separación de

variables se obtienen las condiciones

$$(4) \quad \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 & (x > 0), \\ X(0) &= 0, & |X(x)| < M_1, \\ T'(t) + \lambda k T(t) &= 0, & |T(t)| < M_2 & (t > 0), \end{aligned}$$

donde M_1 y M_2 son constantes. Como ya se indicó en la Sec. 52, el problema singular de autovalores (4) tiene autovalores continuos $\lambda = \alpha^2$, donde α representa a todos los números reales positivos; las autofunciones son $\sin \alpha x$. En este caso, las funciones correspondientes $T = \exp(-\alpha^2 kt)$ están acotadas. La combinación lineal generalizada de las funciones XT para todas las α positivas,

$$(5) \quad u(x,t) = \int_0^\infty g(\alpha) \exp(-\alpha^2 kt) \sin \alpha x \, d\alpha,$$

pueden satisfacer todas las condiciones del problema de contorno si la función g puede determinarse de forma que

$$(6) \quad f(x) = \int_0^\infty g(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha \quad (x > 0).$$

La representación (6) es la fórmula integral de Fourier de senos (2), Sec. 52, para nuestra función f si

$$(7) \quad g(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \sin \alpha \xi \, d\xi \quad (\alpha > 0).$$

Nuestra solución formal es, por tanto,

$$(8) \quad u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\alpha^2 kt) \sin \alpha x \int_0^\infty f(\xi) \sin \alpha \xi \, d\xi \, d\alpha.$$

Podemos simplificar estos resultados intercambiando formalmente el orden de integración, reemplazando $2 \sin \alpha x \sin \alpha \xi$ por $\cos \alpha(x - \xi) - \cos \alpha(x + \xi)$, y aplicando después la fórmula de integración (Problema 12, Sec. 66)

$$(9) \quad \int_0^\infty \exp(-\alpha^2 b) \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{x^2}{4b}\right) \quad (b > 0).$$

La fórmula (8) se convierte entonces en

$$(10) \quad u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4kt}\right] \right\} d\xi$$

cuando $t > 0$. Introduciendo nuevas variables de integración, puede obtenerse la siguiente forma de la Ec. (10)

$$(11) \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2\sqrt{kt})}^{\infty} \exp(-\eta^2) f(x + 2\eta\sqrt{kt}) d\eta \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{kt})}^{\infty} \exp(-\eta^2) f(-x + 2\eta\sqrt{kt}) d\eta.$$

La función u definida por las fórmulas (10) y (11) puede establecerse como solución de nuestro problema exigiendo a f condiciones menos severas. Supongamos que f es solamente casi continua en algún intervalo $(0, x_0)$ y continua y acotada cuando $x \geq x_0$. Entonces, basándose en la fórmula (10) puede demostrarse que u satisface la ecuación del calor (1) porque las funciones

$$t^{-1/2} \exp[-(x \pm \xi)^2/(4kt)]$$

satisfacen dicha ecuación y basándose en la fórmula (11) que u satisface las condiciones (2). De las dos formas (10) y (11) puede deducirse que $u(x,t) - f(x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$ para todo punto x donde f sea continua. Los detalles de la demostración son tediosos¹.

Cuando $f(x) = 1$, se deduce de la fórmula (11) que

$$(12) \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-x/(2\sqrt{kt})}^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta - \int_{x/(2\sqrt{kt})}^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta \right].$$

En términos de la *función error*

$$(13) \quad \operatorname{erf}(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r \exp(-\eta^2) d\eta,$$

donde $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, la fórmula (12) puede escribirse

$$(14) \quad u(x,t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right).$$

La verificación completa de este resultado no tiene dificultad.

¹ Una verificación similar se hace en la pág. 35 y siguientes del libro de Carslaw y Jaeger «Conduction of Heat in Solids» 1947.

66. Temperaturas $u(x,t)$ en un medio ilimitado. Como aplicación de la fórmula integral general de Fourier, deduciremos fórmulas para las temperaturas $u(x,t)$ en un medio que ocupa todo el espacio, cuando la distribución inicial de temperaturas es $f(x)$. Supondremos que f está acotada y, por el momento, que satisface las condiciones para poder ser representada por su fórmula integral de Fourier. El problema de contorno consiste en una condición de acotabilidad $|u(x,t)| < M$ y las condiciones

$$(1) \quad u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad (-\infty < x < \infty, t > 0),$$

$$(2) \quad u(x,0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Por separación de variables se llega al problema singular de autovalores

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad |X(x)| < M_1 \quad (-\infty < x < \infty),$$

cuyos autovalores son $\lambda = \alpha^2$, donde α es real, y a dos autofunciones linealmente independientes $\cos \alpha x$ y $\sin \alpha x$ correspondientes a los valores no nulos de α . Los valores negativos de α no dan autofunciones adicionales, y por ello utilizaremos solo los valores $\alpha \geq 0$.

Nuestra combinación lineal generalizada de funciones XT' se convierte en

$$(3) \quad u(x,t) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2 kt) [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha.$$

Los coeficientes A y B han de determinarse de modo que, cuando $t = 0$, la integral anterior represente a $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$). Según las Ecs. (7) y (8) de la Sec. 50 y el Teorema de la integral de Fourier (Sec. 51), la representación es válida si

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \alpha \xi d\xi.$$

En consecuencia, la fórmula (3) se convierte en

$$(4) \quad u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2 kt) \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \alpha(x - \xi) d\xi d\alpha.$$

Si invertimos formalmente el orden de la integración, puede em-

plearse la fórmula de integración (9) de la Sec. 65 para escribir la Ec. (4) en la forma

$$(5) \quad u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}\right] d\xi \quad (t > 0)$$

Otra forma diferente de esta fórmula es

$$(6) \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\eta\sqrt{kt}) \exp(-\eta^2) d\eta.$$

Las formas (5) y (6) pueden ser establecidas, bastando para ello suponer que f es casi-continua en algún intervalo limitado, $|x| < c$, y continua y acotada en el resto del eje de las x , $|x| \geq c$. Cuando f es una función impar, u se convierte en la función encontrada en la Sección precedente para valores positivos de x .

PROBLEMAS

1. Comprobar que la función $u = \operatorname{erf}(x/\sqrt{kt})$ satisface la ecuación del calor cuando $x > 0$, $t > 0$ y las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} u(+0,t) &= 0 && (t > 0), \\ u(x,+0) &= 1 && (x > 0), \\ |u(x,t)| &< 1 && (x > 0, t > 0). \end{aligned}$$

2. En el caso de que $f(x) = 0$ cuando $0 < x < c$, y $f(x) = 1$ cuando $x > c$ demostrar que la fórmula (11), Sec. 65, se reduce a

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{c+x}{2\sqrt{kt}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{c-x}{2\sqrt{kt}}\right).$$

Comprobar esta solución.

3. La cara $x = 0$ de un sólido semi-infinito se mantiene a una temperatura constante u_0 después de que el sólido $x > 0$ se encuentra inicialmente a la temperatura cero en todo su volumen. Obtener una fórmula para las temperaturas $u(x,t)$ en el cuerpo.

$$\text{Solución} \quad u = u_0 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) \right].$$

4. La cara $x = 0$ de un sólido semi-infinito $x \geq 0$ está aislada. Si la distribución inicial de temperaturas es $f(x)$, deducir la fórmula de temperaturas

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2\sqrt{kt})}^{\infty} f(x + 2\eta\sqrt{kt}) \exp(-\eta^2) d\eta \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{kt})}^{\infty} f(-x + 2\eta\sqrt{kt}) \exp(-\eta^2) d\eta. \end{aligned}$$

5. En el Prob. 4, si $f(x) = 1$ cuando $0 < x < c$ y $f(x) = 0$ cuando $x > c$ demostrar que

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{c-x}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{c+x}{2\sqrt{kt}} \right).$$

6. Si la distribución inicial de temperaturas $f(x)$ en el medio ilimitado (Sec. 66) es $f(x) = 0$ ($x < 0$) y $f(x) = 1$ ($x > 0$), demostrar que

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right).$$

Verificar esta solución del problema de contorno.

7. Deducir la siguiente solución de la ecuación de las ondas $y_{tt} = a^2 y_{xx}$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ que satisface las condiciones $y(x,0) = f(x)$, $y_t(x,0) = 0$, cuando $-\infty < x < \infty$:

$$y(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha t \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos \alpha(x-\xi) d\xi d\alpha.$$

Además, reducir la solución a la forma obtenida en el Ej. 2 de la Sec. 20, a saber,

$$y(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)].$$

8. Una cuerda semi-infinita, con un extremo fijo en el origen y tensa a lo largo del semieje positivo de las x , queda libre desde la posición $y = f(x)$, $x \geq 0$. Deducir la fórmula

$$y(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha t \sin \alpha x \int_0^\infty f(\xi) \sin \alpha \xi d\xi d\alpha$$

para sus desplazamientos transversales. Si $F_1(x)$, $-\infty < x < \infty$ es la extensión impar de f , demostrar que la fórmula se reduce a la forma

$$y(x,t) = \frac{1}{2} [F_1(x+at) + F_1(x-at)].$$

9. Determinar la función armónica $V(x,y)$ en la banda semi-infinita $x > 0$

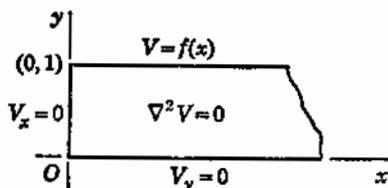


FIG. 20

$0 < y < 1$ que satisface las condiciones de contorno (Fig. 20)

$$V_x(0,y) = 0, \quad V_y(x,0) = 0, \quad V(x,1) = f(x),$$

donde $f(x) = 1$ cuando $0 < x < 1$ y $f(x) = 0$ cuando $x > 1$, y donde $V(x, y)$ ha de estar acotada en la banda.

$$\text{Solución } V = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x \cosh \alpha y}{\alpha \cosh \alpha} d\alpha.$$

10. Si $V(x, y)$ está acotada y es armónica en el cuadrante $x > 0, y > 0$ y

$$\begin{aligned} V(0, y) &= 0 & (y > 0), \\ V(x, 0) &= f(x) & (x > 0), \end{aligned}$$

deducir la siguiente fórmula para V cuando $x \geq 0$ e $y > 0$:

$$V(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \left[\frac{1}{y^2 + (\xi - x)^2} - \frac{1}{y^2 + (\xi + x)^2} \right] d\xi.$$

Cuando $f(x) = 1$ demostrar que

$$V(x, y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

11. Cuando un sólido semi-infinito $x \geq 0$, inicialmente a temperatura uniforme se enfría o calienta por estar su contorno sometido a una temperatura constante y uniforme (Sec. 65), demostrar que los tiempos necesarios para que dos puntos interiores alcancen la misma temperatura son proporcionales a los cuadrados de las distancias de los puntos al plano límite.

12. Deducir la fórmula de integración (9), Sec. 65, escribiendo primero

$$y(r) = \int_0^{\infty} \exp(-a^2 b) \cos ar \, da \quad (b > 0),$$

y derivando la integral para hallar $y'(r)$. Integrar por partes la nueva integral para demostrar que $2by'(r) = -ry(r)$ observando que $y(0) = \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{\pi/b}$, y resolver para $y(r)$.

67. Observaciones y más ejemplos. No todas las ecuaciones entre derivadas parciales lineales homogéneas son atacables por el método de separación de variables. Las condiciones para la existencia de soluciones particulares $V = X(x)Y(y)$ de la ecuación

$$V_{xx}(x, y) + (x + y)^2 V_{yy}(x, y) = 0,$$

por ejemplo, no conducen a ecuaciones diferenciales del tipo de Sturm-Liouville ni en X ni en Y .

Aunque el proceso de separación se aplica a la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares, cilíndricas o esféricas, a ciertas ecuaciones de las ondas y ecuaciones del calor que contienen al operador laplaciano en dichas coordenadas, y a muchas otras ecuaciones, el criterio general consiste en probar el procedimiento en cada ecuación.

a. Condiciones de contorno periódicas. El siguiente ejemplo ilus-

trará problemas que contienen desarrollos en serie básica de Fourier con términos seno y coseno.

Designemos por $u(\rho, \phi)$ las temperaturas estacionarias en un cilindro largo y sólido $\rho \leq 1$, $-\infty < z < \infty$, cuando la temperatura de la superficie $\rho = 1$ es una función dada $f(\phi)$, donde ρ , ϕ y z son coordenadas cilíndricas. Entonces, (Sec. 9)

$$(1) \quad \rho^2 u_{\rho\rho}(\rho, \phi) + \rho u_{\phi\phi}(\rho, \phi) + u_{zz}(\rho, \phi) = 0 \quad (\rho < 1, -\pi < \phi \leq \pi),$$

$$(2) \quad u(1, \phi) = f(\phi) \quad (-\pi < \phi < \pi).$$

Además, u y sus derivadas parciales de primer orden han de ser continuas en el interior del cilindro.

Si funciones del tipo $R(\rho)\Phi(\phi)$ han de satisfacer la Ec. (1) y las exigencias de continuidad, se tiene que

$$(3) \quad \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0, \quad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \quad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi),$$

$$(4) \quad \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0 \quad (0 \leq \rho < 1).$$

Los autovalores del problema (3), cuyas condiciones de contorno son de tipo periódico, son los números $\lambda = 0$ y $\lambda = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), como se vio en la Sec. 34. El sistema $\{1, \cos n\phi, \sin n\phi\}$ es un sistema de las autofunciones correspondientes, ortogonal en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

La Ec. (4) es del tipo de Cauchy. Cuando $\lambda = n^2$, su solución general es $R = C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}$; cuando $\lambda = 0$, $R = C_3 \log \rho + C_4$. Si R ha de ser continua en el eje $\rho = 0$, entonces $C_2 = C_3 = 0$. La combinación lineal generalizada de nuestras funciones continuas $R\Phi$ puede escribirse

$$(5) \quad u(\rho, \phi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi).$$

que satisface la condición de contorno (2) si a_n y b_n , incluyendo a_0 , son los coeficientes en la serie de Fourier de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \cos n\phi \, d\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \sin n\phi \, d\phi.$$

Suponemos que f satisface las condiciones en nuestro teorema de Fourier (Sec. 41).

b. Series de Sturm-Liouville. Aun en el caso de que sea aplicada la separación de variables, el procedimiento de superposición puede conducir a una representación de una función dada en serie genera-

lizada de Fourier. Nuestro procedimiento formal podrá entonces incluir la suposición de que la representación es válida.

Por ejemplo, designemos por $u(x,t)$ las temperaturas en un paralelepípedo limitado por los planos $x=0$ y $x=1$, inicialmente a las temperaturas $f(x)$, cuando $u=0$ en la cara $x=0$ y la transmisión de calor tiene lugar en la cara $x=1$ al medio circundante a temperatura cero, proporcionalmente por unidad de área, a $[u(1,t)-0]$ (Fig. 21). Si $k=1$ y h es una constante positiva, coeficiente de transmisión calorífica en la superficie, se tiene

$$(6) \quad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (0 < x < 1, t > 0),$$

$$(7) \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = -hu(1,t), \quad u(x,0) = f(x).$$

Aquí $T'(t) = -\lambda T(t)$, y el problema de Sturm-Liouville es

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad hX(1) + X'(1) = 0.$$

El sistema entero de autovalores, encontrado en el Prob. 6, Sec. 34,

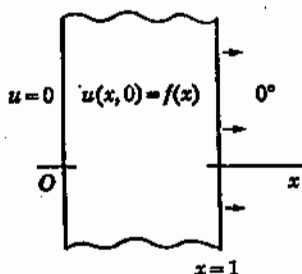


FIG. 21

es $\lambda = \alpha_n^2$, donde α_n son las raíces positivas de la ecuación $\tan \alpha = -\alpha/h$. Las autofunciones normalizadas resultan ser

$$(8) \quad \phi_n(x) = \left(\frac{2h}{h + \cos^2 \alpha_n} \right)^{1/2} \sin \alpha_n x \quad (n = 1, 2, \dots),$$

y la solución formal de nuestro problema es

$$(9) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\alpha_n^2 t) \phi_n(x),$$

donde, para que $u(x,0) = f(x)$ cuando $0 < x < 1$,

$$(10) \quad c_n = \int_0^1 f(x)\phi_n(x) dx = \left(\frac{2h}{h + \cos^2 \alpha_n} \right)^{1/2} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} \alpha_n x dx.$$

Hemos supuesto que nuestra función f está representada por su serie de Fourier generalizada con respecto a las autofunciones ortogonales (8)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad [0 < x < 1, c_n = (f, \phi_n)].$$

Los teoremas de representación de la teoría de Sturm-Liouville, demostrados en las referencias citadas en la Sec. 32, muestran que la serie converge a $f(x)$ en todos los puntos $x(0 < x < 1)$, donde f sea continua, supuesto que f y f' sean casi-continuas en el intervalo $(0,1)$.

PROBLEMAS

1. Cuando $f(x) = 1$, ($0 < x < 1$) en el problema de contorno consistente en las ecuaciones (6) y (7), Sec. 67, demostrar que

$$u(x,t) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha_n}{\alpha_n(h + \cos^2 \alpha_n)} \exp(-\alpha_n^2 t) \operatorname{sen} \alpha_n x.$$

2. Hallar la función armónica $u(\rho, \phi)$ en el cuadrante $\rho < 1$, $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$ de un círculo unidad en el plano $z = 0$ si $u = 0$ en los radios $\phi = 0$ y $\phi = \frac{1}{2}\pi$ y $u = f(\phi)$ en el arco $\rho = 1$, $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$.

$$\text{Solución} \quad u = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} \operatorname{sen} 2n\phi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\theta) \operatorname{sen} 2n\theta d\theta.$$

3. Una cuerda estirada entre los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ se deja libre desde una posición inicial $y = f(x)$. A su movimiento se opone la resistencia del aire proporcional a la velocidad en cada punto. Se elige la unidad de tiempo de modo que la ecuación del movimiento tenga la forma

$$y_{tt}(x,t) = y_{xx}(x,t) - 2hy_t(x,t).$$

Cuando $0 < h < 1$ (h constante), deducir la fórmula

$$y(x,t) = e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\cos K_n t + \frac{h}{K_n} \operatorname{sen} K_n t \right) \operatorname{sen} nx$$

para los desplazamientos transversales, donde

$$K_n = (n^2 - h^2)^{1/2}, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx.$$

4. Determinar la función armónica $V(x,y)$ en la banda $0 < y < b$, $-\infty < x < \infty$ tal que $V(x,0) = 0$ y $V(x,b) = f(x)$ ($-\infty < x < \infty$), donde f está acotada y representada por su fórmula integral de Fourier y $V(x,y)$ ha de estar acotada en la banda.

$$\text{Solución } V(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh \alpha y}{\sinh \alpha b} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \alpha(x - \xi) d\xi d\alpha.$$

5. Una función armónica $u(x,y)$ acotada en la banda semi-infinita $x > 0$, $0 < y < 1$ ha de satisfacer las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 1 & (0 < y < 1); \\ u_y(x,0) &= 0, & u_y(x,1) = -u(x,1) & (x > 0). \end{aligned}$$

Aceptando la validez del desarrollo de Sturm-Liouville que aparece, deducir la fórmula

$$u(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha_n}{\alpha_n(1 + \operatorname{sen}^2 \alpha_n)} \exp(-\alpha_n x) \cos \alpha_n y,$$

donde α_n son las raíces positivas de la ecuación $\operatorname{tg} \alpha = 1/\alpha$.

6. Resolver el siguiente problema de contorno para las temperaturas estacionarias $u(x,y)$ en una placa delgada que tiene la forma de una banda semi-infinita cuando la transmisión de calor al medio ambiente a temperatura cero tiene lugar en las caras de la placa

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - hu(x,y) &= 0 & (x > 0, 0 < y < 1), \\ u_x(0,y) &= 0 & (0 < y < 1); \\ u(x,0) &= 0, & u(x,1) = f(x) & (x > 0), \end{aligned}$$

donde h es una constante positiva y $f(x) = 1$ cuando $0 < x < c$, $f(x) = 0$ cuando $x > c$.

$$\text{Solución } u(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha c \cos \alpha x \operatorname{senh} (y \sqrt{\alpha^2 + h})}{\alpha \operatorname{senh} \sqrt{\alpha^2 + h}} d\alpha.$$

7. Sea $u(r,t)$ la función de distribución de temperaturas en una esfera sólida, limitada por la superficie $r = c$, donde r es la coordenada esférica y cuando el sólido está inicialmente a la temperatura uniforme u_0 y la superficie se mantiene a la temperatura cero. Se tiene entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru), \quad u(c,t) = 0, \quad u(r,0) = u_0 \quad (0 \leq r < c).$$

Introducir la nueva función incógnita $v(r,t) = ru(r,t)$ y observar que $v(0,t) = 0$ porque u ha de ser continua en el centro $r = 0$. Teniendo esto en cuenta, deducir la fórmula

$$u(r,t) = \frac{2u_0c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{c^2}\right) \frac{1}{nr} \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{c}.$$

8. Un cuerpo esférico de 40 cm de diámetro, se encuentra todo él, inicialmente, a la temperatura de 100°C y se le enfría manteniendo su superficie a 0°C (ver

Problema 7). Hallar la temperatura aproximada en su centro, 10 minutos después de comenzado el enfriamiento si el material es a) hierro, para el que $k \approx 0,15$ cgs unidad es c.g.s.; (b) cemento, para el que $k = 0,005$ unidades c.g.s.

Solución (a) 22°C ; (b) 100°C .

9. El contorno $r = 1$ de una esfera sólida se mantiene aislado. Inicialmente el sólido se encuentra a las temperaturas $f(r)$. Aceptando la validez del desarrollo de Sturm-Liouville que aparece (Problema 5, Sec. 34), deducir la siguiente fórmula para las temperaturas en la esfera

$$u(r,t) = 3 \int_0^1 \xi^2 f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\alpha_n^2 kt) \frac{\text{sen } \alpha_n r}{r},$$

donde α_n son las raíces positivas de la ecuación $\text{tg } \alpha = \alpha$ y

$$A_n = \frac{2}{\text{sen}^2 \alpha_n} \int_0^1 \xi f(\xi) \text{sen } \alpha_n \xi d\xi.$$

10. Para cualquier constante C , verificar que la función

$$v(x,t) = Cxt^{-3/2} \exp[-x^2/(4kt)]$$

satisface la ecuación del calor cuando $x > 0$ y $t > 0$. Comprobar también que $v(+0,t) = 0$ cuando $t > 0$ y que $v(x,+0) = 0$ cuando $x > 0$, y que por tanto puede sumarse v a la función u encontrada en la Sec. 65 para formar otras soluciones de aquel problema si no se exigiera de la función de temperaturas que fuera acotada. Obsérvese, sin embargo, que v no está acotada cuando x y t tienden a cero, como puede verse haciendo tender x a cero mientras $t = x^2$.

FUNCIONES DE BESSEL Y SUS APLICACIONES

68. Ecuación de Bessel. En los problemas de contorno que contienen la laplaciana $\nabla^2 u$ expresada en coordenadas cilíndricas, el proceso de separación de variables conduce frecuentemente a una ecuación de la forma:

$$(1) \quad \rho^2 \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \rho \frac{dy}{d\rho} + (\lambda^2 \rho^2 - \nu^2)y = 0$$

en la función y de la coordenada cilíndrica ρ . En tales problemas, como veremos en los ejemplos presentados en este capítulo, el parámetro λ^2 es la constante de separación cuyos valores son los autovalores asociados con la Ec. (1). El parámetro ν es un número real determinado por otros aspectos del problema de contorno; en la mayoría de las ocasiones, es cero o un entero positivo.

Cuando se escribe en términos de la variable x , donde

$$x = \lambda\rho,$$

la Ec. (1) toma una forma en la que no aparece el parámetro λ :

$$(2) \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0.$$

Esta ecuación diferencial lineal homogénea es la *ecuación de Bessel*. Sus soluciones se conocen como *funciones de Bessel* o, a veces, como *funciones cilíndricas*.

Comparando la Ec. (2) con la forma normal

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = 0,$$

se ve que $A(x) = 1/x$ y $B(x) = 1 - \nu^2/x^2$. Estos coeficientes son continuos excepto en el origen, que es un punto singular de la ecuación.

ción de Bessel. El teorema de existencia y unicidad enunciado en la Sec. 19 es aplicable a la ecuación para un intervalo que no incluya al origen. Pero para problemas de contorno en regiones interiores a circunferencias o cilindros $\rho = c$ el origen $x = 0$, correspondiente al centro o eje $\rho = 0$, es interior a la región. El intervalo para la variable x tiene entonces como uno de sus extremos al origen.

Limitaremos nuestra atención principalmente a los casos $\nu = n$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$. En estos casos veremos que existe una solución de la ecuación de Bessel que es *analítica para todos los valores de x* , incluyendo al origen, esto es, la solución está representada por una serie de potencias de x , convergente para todos los valores de x . Esta solución, que se designa por $J_n(x)$, y sus derivadas de todos los órdenes son, por tanto, funciones continuas para todos los valores de x .

69. Funciones J_n de Bessel. Tratemos de hallar una solución de la ecuación de Bessel

$$(1) \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

en la forma de una serie de potencias multiplicada por x^p , donde p sea una constante. Esto es, intentemos determinar p y los coeficientes a_j de modo que la función

$$(2) \quad y = x^p \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{p+j}$$

satisfaga la Ec. (1). Aquí, a_0 representa el coeficiente del primer término no nulo de la serie, de modo que $a_0 \neq 0$.

Supongamos por el momento que la serie es derivable. Entonces, sustituyendo la función (2) y sus derivadas en la Ec. (1) se obtiene la ecuación

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(p+j)(p+j-1) + (p+j) + (x^2 - n^2)] a_j x^{p+j} = 0,$$

$$\text{ó} \quad \sum_{j=0}^{\infty} [(p+j)^2 - n^2] a_j x^j + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = 0.$$

La última suma puede escribirse

$$\sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} x^j;$$

y la ecuación toma la forma

$$(3) \quad (p-n)(p+n)a_0 + (p-n+1)(p+n+1)a_1x + \sum_{j=2}^{\infty} [(p-n+j)(p+n+j)a_j + a_{j-2}]x^j = 0.$$

La Ec. (3) es una identidad en x si el coeficiente de cada potencia de x se anula. Esta condición queda satisfecha si $p = n$ ó $p = -n$ de modo que el término constante se anule y si $a_1 = 0$ y

$$(p-n+j)(p+n+j)a_j + a_{j-2} = 0 \quad (j = 2, 3, \dots).$$

Elegiremos $p = n$; entonces se obtiene la *relación de recurrencia*

$$(4) \quad a_j = -\frac{1}{j(2n+j)} a_{j-2} \quad (j = 2, 3, \dots)$$

que dé cada coeficiente en función del que le precede dos lugares en la serie. Obsérvese que $2n+j \neq 0$ en la Ec. (4). La elección $p = -n$ no conduce a una relación de recurrencia.

Como $a_1 = 0$, la relación (4) exige que $a_3 = 0$, y, por tanto, que $a_5 = 0$, etc.; de modo que

$$(5) \quad a_{2j-1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Para el resto de los coeficientes la relación de recurrencia es

$$(6) \quad a_{2j} = \frac{-1}{2^2 j(n+j)} a_{2j-2} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Por consiguiente,

$$a_{2j-2} = \frac{-1}{2^2(j-1)(n+j-1)} a_{2j-4}$$

y también

$$a_{2j} = \frac{(-1)^2}{j(j-1)(n+j)(n+j-1)} \frac{1}{2^4} a_{2j-4}.$$

Continuando este proceso a través de $j-2$, y avanzando unos pasos más, se encuentra que

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j}{j! (n+j)(n+j-1) \cdots (n+1)} \frac{1}{2^{2j}} a_0.$$

Resulta, pues, que a_0 es un factor común de todos los términos de la serie. Para simplificar la serie, elegiremos para a_0 el valor

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!}$$

Entonces, nuestra fórmula para los coeficientes no nulos se convierte en

$$(7) \quad a_{2j} = \frac{(-1)^j \dots 1}{j!(n+j)! 2^{n+2j}} \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

donde empleamos la convención de que $0! = 1$.

La solución propuesta (2) de la ecuación de Bessel puede ahora escribirse, según la fórmula (5) y (7)

$$y = J_n(x)$$

donde J_n es la función de Bessel de primera clase o especie de orden n , ó índice n , definida por la ecuación

$$(8) \quad J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$= \frac{x^n}{2^n n!} \left[1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(n+1)(n+2)} - \dots \right]$$

La serie de potencias (8) es absolutamente convergente para todas las x ($-\infty < x < \infty$), según el criterio del cociente. Por tanto, es derivable respecto a x cualquier número de veces. Como sus coeficientes satisfacen la relación de recurrencia necesaria para que su suma satisfaga la ecuación de Bessel cuando la serie es derivable, se tiene que $y = J_n(x)$ es una solución de esa ecuación.

Teorema 1. Para todos los valores de x , la función analítica $J_n(x)$ es una solución particular de la ecuación de Bessel (1).

Siendo homogénea la ecuación de Bessel, la función $CJ_n(x)$, donde C es cualquier constante, es también una solución.

Se comprueba en la fórmula (8) que

$$(9) \quad J_n(-x) = (-1)^n J_n(x);$$

es decir, J_n es una función par si $n = 0, 2, 4, \dots$, pero es impar si $n = 1, 3, 5, \dots$

Obsérvese que la serie, representación de J_0

$$(10) \quad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots,$$

tiene algún parecido con la serie de potencias de $\cos x$. También existe alguna semejanza entre las series de potencias que representan a las funciones impares $J_1(x)$ y $\sin x$. Las semejanzas entre las propiedades de esas funciones incluyen, como veremos, la fórmula de derivación $j'_0(x) = -j_1(x)$, correspondiente a la fórmula para la derivada de $\cos x$. Las gráficas de J_0 y J_1 se mostrarán en la Sec. 75.

70. Algunas otras funciones de Bessel. Por medio de varios métodos de naturaleza bastante elemental, pueden obtenerse funciones linealmente independientes de J_n que satisfacen la ecuación de Bessel

$$(1) \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

El punto singular $x = 0$ de la Ec. (1) pertenece a la clase conocida como puntos singulares regulares. El procedimiento de las series de potencias extendido de forma que dé soluciones generales cerca de los puntos singulares regulares, es aplicable a la ecuación de Bessel¹. Proporciona la solución $y = Y_n(x)$, donde Y_n , *función de Bessel de segunda clase o especie*, está representada por la suma de $J_n(x) \log x$ y una serie de potencias que converge para todos los valores de x . En particular, cuando $x > 0$,

$$(2) \quad Y_0(x) = J_0(x) \log x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

Al no estar acotada Y_n y estarlo J_n cuando $x \rightarrow 0$, es claro que Y_n no es el producto de una constante por J_n ; esto es, Y_n y J_n son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel. Si A y B son constantes arbitrarias, la solución general de la ecuación es, por consiguiente,

$$(3) \quad y = AJ_n(x) + BY_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots; x > 0).$$

¹ El procedimiento está explicado en E. D. Rainville «Elementary Differential Equations», 2.^a ed. cap. 19, 1958. El método depende de la naturaleza de las raíces de la ecuación de índices, la condición del exponente p . Para la ecuación de Bessel y la ecuación de índices es $p^2 - n^2 = 0$, como puede verse observando la ecuación (3), Sec. 69.

Una integración por partes muestra que la *función gamma*

$$(4) \quad \Gamma(v) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v-1} dt \quad (v > 0)$$

tiene la propiedad factorial

$$(5) \quad \Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$$

cuando $v > 0$. Se *asigna* esta propiedad a la función cuando $v < 0$ de modo que $\Gamma(v) = \Gamma(v+1)/v$ cuando $-1 < v < 0$ o cuando $-2 < v < -1$, etc.; se tiene así que el par de condiciones (4) y (5) definen $\Gamma(v)$ para todos los valores de v excepto $v = 0, -1, -2, \dots$. De la Ec. (4) se obtiene el valor $\Gamma(1) = 1$; puede también demostrarse que Γ es continua cuando $v > 0$. Se sigue entonces de la propiedad (5) que $\Gamma(+0) = \infty$ y en consecuencia que $|\Gamma(v)|$ se hace infinita cuando $v \rightarrow -n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Cuando $v = 2, 3, \dots$ $\Gamma(v)$ se reduce a un factorial, concretamente

$$(6) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Las demostraciones de la propiedad (6) y de la propiedad de que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

quedan para los problemas.

Consideremos ahora la ecuación de Bessel

$$(7) \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

en la que ν es cualquier número real. El procedimiento utilizado en la Sec. 69 puede modificarse, empleando la propiedad factorial de la función gamma, para deducir la solución

$$y = J_{\nu}(x),$$

donde J_{ν} es la *función de Bessel de primera especie de índice ν* :

$$(8) \quad J_{\nu}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\nu + j + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2j}$$

En el caso de que ν sea un entero negativo, aquellos términos para los cuales el argumento $(\nu + j + 1)$ de Γ tenga valores cero o enteros negativos han de hacerse desaparecer de la serie. La comprobación de que J_{ν} satisface a la Ec. (7), no es difícil. Obsérvese que nuestra

definición (8), Sec. 69, de J_n es un caso especial de la definición anterior de J_n .

La serie (8) es un producto de x^v por una serie de potencias de x que converge para todas las x . Así, cuando $v \neq \pm n$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces J_n , o alguna de sus derivadas, no existen cuando $x = 0$. Cuando v no tiene ninguno de los valores $\pm n$, una de las dos funciones J_n ó J_{-n} , no está acotada cuando $x \rightarrow 0$ y la otra tiende a cero cuando $x \rightarrow 0$. Por tanto, J_n y J_{-n} son funciones linealmente independientes, y la solución general de la ecuación de Bessel (7) puede escribirse

$$(9) \quad y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \quad (v \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Se deja para los problemas la demostración de que J_n y J_{-n} son linealmente dependientes porque

$$(10) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

71. Fórmulas de derivación y recurrencia. Per ser

$$x^{-n} J_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

resulta que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(-1)^j}{j!(j-1)!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-1} \\ &= x^{-n} \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(n+k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\ &= -x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1+2k} \end{aligned}$$

Esto es

$$(1) \quad \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Como caso especial se tiene la fórmula

$$(2) \quad J'_0(x) = -J_1(x).$$

Análogamente, partiendo de la serie potencial que representa

$x^n J_n(x)$ se puede demostrar que

$$(3) \quad \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Las fórmulas (1) y (3) pueden escribirse

$$\begin{aligned} xJ'_n(x) - nJ_n(x) &= -xJ_{n+1}(x), \\ xJ'_n(x) + nJ_n(x) &= xJ_{n-1}(x), \end{aligned}$$

y por eliminación de $J'_n(x)$ de esas ecuaciones se encuentra que

$$(4) \quad xJ_{n+1}(x) = 2nJ_n(x) - xJ_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Esta *fórmula de recurrencia* expresa J_{n+1} en términos de las funciones J_n y J_{n-1} de índices más bajo.

De la fórmula (3) se obtiene la fórmula de integración

$$(5) \quad \int_0^r x^n J_{n-1}(x) dx = r^n J_n(r) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Un caso importante es

$$(6) \quad \int_0^r x J_0(x) dx = r J_1(r).$$

Las fórmulas (1), (3) y (4) son válidas cuando se reemplaza n por el parámetro no restringido ν . Las modificaciones para la deducción de las fórmulas consisten simplemente en poner $\Gamma(\nu + j + 1)$ ó $(\nu + j)!$ en lugar de $(n + j)!$

PROBLEMAS

1. Demostrar que

$$J_0(0) = 1, J_n(0) = 0 \quad \text{si } n = 1, 2, \dots$$

2. Obtener la fórmula (3) Sec. 71.
3. Establecer la fórmula de derivación

$$x^2 J''_n(x) = (n^2 - n - x^2) J_n(x) + x J_{n+1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

4. Partiendo de la serie que representa a J_n demostrar que

$$i^{-n} J_n(ix) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

La función $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$ es la función de Bessel modificada de primera especie. Demostrar que la serie converge para todas las x ; demostrar también que $I_n(x) > 0$ cuando $x > 0$, que $I_n(-x) = (-1)^n I_n(x)$, y que puesto que $J_n(x)$ satisface la ecuación de Bessel, I_n satisface la ecuación modificada

$$t^2 I''_n(t) + t I'_n(t) - (t^2 + n^2) I_n(t) = 0.$$

5. (a) Deducir la propiedad factorial $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$ de la función gamma donde $v > 0$. (b) Demostrar que $\Gamma(1) = 1$ y que $\Gamma(n+1) = n!$ cuando $n = 1, 2, \dots$

6. Demostrar que

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\infty) = \sqrt{\pi}.$$

7. Partiendo de la definición (8), Sec. 70, de J , demostrar que

$$(a) J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x; \quad (b) J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x.$$

8. Utilizar la fórmula (8), Sec. 70, recordando que los términos en los que $v+j+1$ tenga un valor cero o entero negativo, han de hacerse desaparecer de la serie, para demostrar que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots);$$

y de aquí, que las funciones J_n y J_{-n} son linealmente dependientes.

9. Verificar que la función J , definida por la fórmula (8), Sec. 70, satisface la ecuación de Bessel de índice v .

10. Deducir la fórmula de derivación

$$\frac{d}{dx} [x^v J_{-v}(x)] = x^v J_{-v+1}(x) \quad (v \text{ no restringida}).$$

72. Formas integrales de J_n . Consideremos dos series de potencias absolutamente convergentes de sumas $\alpha(x)$ y $\beta(x)$:

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \alpha(x), \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \beta(x).$$

Entonces, el *producto de Cauchy* de las dos series converge absolutamente, y su suma es el producto de sus sumas¹, es decir,

$$(2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \alpha(x)\beta(x), \quad \text{donde } c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}.$$

Con objeto de asociar los coeficientes c_j con los coeficientes $(-1)^j [j!(n+j)!2^j]^{-1}$ de la serie de potencias que representa a $J_n(x)$ hare-

¹ Kaplan, W., «Advanced Calculus» p. 334, 1952.

mos también depender a α y β de parámetros θ y n ($n = 1, 2, \dots$) como sigue:

$$(3) \quad \alpha(x, \theta) = \exp\left(\frac{1}{2}ixe^{i\theta}\right), \quad \beta(x, \theta) = \exp\left(\frac{1}{2}ixe^{-i\theta}\right)e^{in\theta}.$$

Entonces, de la representación de $\exp z$ en potencias de z absolutamente convergentes para todos los valores complejos de z se deduce que los coeficientes de x^k en la serie (1) son

$$(4) \quad a_k(\theta) = \frac{i^k}{2^k k!} e^{ik\theta}, \quad b_k(\theta) = \frac{i^k}{2^k k!} e^{i(n-k)\theta},$$

y si escribimos
$$d_k = \frac{i^k}{2^k k!},$$

los coeficientes del producto de Cauchy se convierten en

$$(5) \quad c_m(\theta) = \sum_{k=0}^m d_k e^{ik\theta} d_{m-k} e^{i(n-m+k)\theta} \\ = \sum_{k=0}^m d_k d_{m-k} e^{i(2k-m+n)\theta}$$

Como
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ip\theta} d\theta = 0 \quad \text{si } p = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ = 2\pi \quad \text{si } p = 0,$$

la integral de $-\pi$ a π de $\exp[i(2k-m+n)\theta]$ se anula a menos que $2k = m - n$. Pero en la fórmula (5), $2k$ puede ser igual a $m - n$ solo en el caso de que $m - n$ sea cero o un entero positivo par; esto es, si $m - n = 2j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), esto incluye la condición de que $m \geq n$. En este caso, $k = j$ puesto que $2k = m - n = 2j$; además, $m - k = 2j + n - j = n + j$ y, de acuerdo con la fórmula (5),

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} c_{n+2j}(\theta) d\theta = 2\pi d_j d_{n+j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

pero

$$(7) \quad \int_{-\pi}^{\pi} c_m(\theta) d\theta = 0 \quad \text{si } m \neq n + 2j.$$

Ahora bien, la serie en la representación

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(\theta) x^m = \alpha(x, \theta) \beta(x, \theta)$$

es uniformemente convergente con respecto a θ a lo largo del intervalo $(-\pi, \pi)$. Para demostrar esto, observemos que, de acuerdo con la Ec. (5),

$$|c_m(\theta)x^m| \leq |x|^m \sum_{k=0}^{\infty} |d_k| |d_{m-k}|.$$

Los números representados por el segundo miembro son independientes de θ . Son los términos del producto de Cauchy de dos series convergentes de términos positivos, a saber, las series de valores absolutos de los términos de las series de representación de potencias de $\alpha(x, \theta)$ y $\beta(x, \theta)$, series que son absolutamente convergentes. El criterio de Weierstrass, por tanto, es aplicable para demostrar la convergencia uniforme con respecto a θ . Por consiguiente, la integración de la serie queda justificada y, según las fórmulas (6) y (7), podemos escribir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(x, \theta) \beta(x, \theta) d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \int_{-\pi}^{\pi} c_m(\theta) d\theta = 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} d_j d_{n+j} x^{n+2j}.$$

Como $d_j = i^j / (j! 2^j)$, la última serie se convierte en

$$i^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} = i^n J_n(x).$$

Tenemos así la representación integral

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(x, \theta) \beta(x, \theta) d\theta$$

que, de acuerdo con las definiciones (3) de α y β se convierte en

$$(8) \quad J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \cos \theta) e^{in\theta} d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ahora bien, $i = \exp(i\pi/2)$. Por tanto,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \cos \theta) \exp \left[in \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] d\theta.$$

Entonces, sustituyendo $\frac{1}{2}\pi - \theta$ por ϕ , y observando que el in-

tegrando es periódico en θ y ϕ con período 2π se encuentra que

$$(9) \quad J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp [i(x \operatorname{sen} \phi - n\phi)] d\phi.$$

La parte imaginaria de esta integral se anula, desde luego, ya que $J_n(x)$ es real cuando x es real. Por consiguiente,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (x \operatorname{sen} \phi - n\phi) d\phi.$$

o teniendo en cuenta que el integrando anterior es una función par de ϕ ,

$$(10) \quad J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (n\phi - x \operatorname{sen} \phi) d\phi \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Esta es la forma *integral de Bessel* de J_n .

73. Consecuencias de la forma integral de Bessel. De la representación integral

$$(1) \quad J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (n\phi - x \operatorname{sen} \phi) d\phi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

obtenida anteriormente, resulta que

$$J'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} (n\phi - x \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \phi d\phi.$$

y así, sucesivamente, para $J''_n(x)$ y las derivadas de orden superior. Como el valor absoluto del integrando de cada una de las integrales no excede de la unidad, pueden deducirse de la forma integral de Bessel (1) las siguientes *propiedades de acotabilidad*.

$$(2) \quad |J_n(x)| \leq 1, \quad \left| \frac{d^k}{dx^k} J_n(x) \right| \leq 1$$

($-\infty < x < \infty, k = 1, 2, \dots$).

El integrando de la fórmula (1) puede escribirse

$$\cos (n\phi - x \operatorname{sen} \phi) = f_n(x, \phi) + g_n(x, \phi),$$

donde

$$f_n(x, \phi) = \cos n\phi \cos (x \operatorname{sen} \phi), \quad g_n(x, \phi) = \operatorname{sen} n\phi \operatorname{sen} (x \operatorname{sen} \phi).$$

Para cada valor fijo de x , las gráficas de f_n y g_n tienen las siguientes propiedades de simetría con respecto a la recta $\phi = \frac{1}{2}\pi$:

$$(3) \quad \begin{aligned} f_n(x, \pi - \phi) &= (-1)^n f_n(x, \phi), \\ g_n(x, \pi - \phi) &= -(-1)^n g_n(x, \phi). \end{aligned}$$

Se tiene, por tanto, que

$$\int_0^\pi f_{2n} d\phi = 2 \int_0^{\pi/2} f_{2n} d\phi, \quad \int_0^\pi g_{2n} d\phi = 0,$$

y como consecuencia

$$(4) \quad \begin{aligned} J_{2n}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2n\phi \cos(x \operatorname{sen} \phi) d\phi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos 2n\phi \cos(x \operatorname{sen} \phi) d\phi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Análogamente, cuando $n = 1, 2, \dots$ se ve que

$$(5) \quad \begin{aligned} J_{2n-1}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} [(2n-1)\phi] \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \phi) d\phi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} [(2n-1)\phi] \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \phi) d\phi. \end{aligned}$$

Como caso especial de la fórmula (4) se observa que

$$(6) \quad J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \phi) d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta.$$

Para cada valor fijo de x el teorema de Riemann-Lebesgue (Lema 1, Sec. 40) se aplica a las integrales de las fórmulas (4) y (5) para demostrar que $J_{2n}(x)$ y $J_{2n-1}(x)$ tienden a cero al aumentar n . Es decir,

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Otra propiedad aún más importante es que, para cada valor fijo de n ,

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} J_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Para indicar un sistema de demostrarlo, consideremos el caso espe-

cial $n = 0$. Sustituyendo $\sin \phi$ por t en la fórmula (8), se obtiene

$$\frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^c \frac{\cos xt}{(1-t^2)^{1/2}} dt + \int_c^1 \frac{\cos xt}{(1-t^2)^{1/2}} dt$$

donde $0 < c < 1$. La segunda integral es impropia, pero uniformemente convergente con respecto a x . Correspondiendo a cualquier número positivo ε , el valor absoluto de esa integral puede hacerse menor que $1/2 \varepsilon$ uniformemente para todas las x , eligiendo c de modo que $1 - c$ sea suficientemente pequeño y positivo. El teorema de Riemann-Lebesgue se aplica entonces a la primera integral, con ese valor de c . Es decir, existe un número x_1 tal que el valor absoluto de la primera integral es menor que $1/2 \varepsilon$ siempre que $x > x_1$. Por tanto,

$$\frac{\pi}{2} |J_0(x)| < \varepsilon \quad \text{cuando } x > x_1,$$

lo que prueba la propiedad (8) cuando $n = 0$. La demostración para los otros casos se deja para resolver en los problemas.

PROBLEMAS

1. Emplear las fórmulas integrales de J_n para verificar que (a) $J_0(0) = 1$; (b) $J_n(0) = 0$ cuando $n = 1, 2, \dots$; (c) $J'_0(x) = -J_1(x)$.
2. Deducir de la fórmula (4) que, cuando $n = 0, 1, 2, \dots$

$$J_{2n}(x) = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2n\theta) \cos(x \cos \theta) d\theta.$$

3. Deducir de la fórmula (5) que, cuando $n = 1, 2, \dots$

$$J_{2n-1}(x) = -(-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos[(2n-1)\theta] \sin(x \cos \theta) d\theta.$$

4. Completar la demostración de la propiedad (8)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

5. Verificar directamente de la representación

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \phi) d\phi$$

que $J_0(x)$ satisface la ecuación de Bessel en la que $n = 0$.

6. Partiendo de las representaciones integrales de J_n demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n J_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

*para cada valor fijo de x . (Ver Prob. 4. Sec. 48).

7. Cuando $n = 1, 2, \dots$ demostrar que

$$\int_0^\pi \sin(2n\phi) \sin(x \sin \phi) d\phi = 0.$$

Entonces con ayuda de la fórmula (5) y de nuestro teorema de Fourier demostrar que, para todos los valores reales de x y θ ,

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin(2n-1)\theta.$$

8. Demostrar que, cuando $n = 1, 2, \dots$

$$\int_0^\pi \cos[(2n-1)\phi] \cos(x \sin \phi) d\phi = 0.$$

Entonces con la ayuda de la fórmula (4) y de nuestro teorema de Fourier demostrar que para todos los valores reales de x y θ ,

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\theta.$$

74. Los ceros de $J_0(x)$. La forma integral

$$\frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \phi) d\phi$$

se convierte después de la sustitución $t = x \sin \phi$ en

$$(1) \quad \frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt \quad (x > 0).$$

Basándonos en el comportamiento del integrando, demostraremos que esta integral impropia convergente tiene el valor cero para una sucesión infinita de valores de x positivos.

Designemos por c_k a los múltiplos impares de $\pi/2$,

$$c_k = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

y consideremos la integral cuando $x = c_k$. Su integrando

$$(2) \quad y_k(t) = \frac{\cos t}{(c_k^2 - t^2)^{1/2}} \quad (0 \leq t < c_k)$$

tiene el límite cero cuando $t \rightarrow c_k$. Como definición, consideraremos que $y_k(c_k)$ es cero; entonces, y_k es una función continua de t a lo largo

del intervalo de integración $0 \leq t \leq c_k$. Obsérvese que y_0 está definido solamente en el intervalo $0 \leq t \leq \pi/2$, y_1 en el intervalo $0 \leq t \leq 3\pi/2$, etcétera.

Ahora bien, $y_k(t) > 0$ en el intervalo $0 < t < \pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), ya que allí $\cos t > 0$. Análogamente, se ve que y_1, y_2, \dots tienen valores negativos a lo largo del intervalo $\pi/2 < t < 3\pi/2$, que y_2, y_3, \dots tienen valores positivos a lo largo del siguiente intervalo de longitud π , y así sucesivamente.

Para un entero fijo positivo k , designaremos por K_0 el área bajo la gráfica de $y_k(t)$ a lo largo del intervalo $(0, \frac{1}{2}\pi)$, que es el intervalo $0 < t < c_0$, y designaremos con el número positivo K_j el área limitada por el eje de las t , la gráfica y las líneas $t = c_{j-1}$ y $t = c_j$, donde $j = 1, 2, \dots, k$. Entonces,

$$(3) \quad \frac{\pi}{2} J_0(c_k) = \int_0^{c_k} y_k(t) dt = K_0 - K_1 + K_2 - \dots + (-1)^k K_k.$$

Al ser fijo c_k el valor de $(c_k^2 - t^2)^{1/2}$ disminuye cuando t aumenta acercándose a c_k . Pero $|\cos t|$ es periódico de período π . De ello se sigue que $|y_k(t)|$ aumenta cuando t aumenta en π y, por tanto, que el área K_j satisface las desigualdades $K_0 < K_1 < \dots < K_k$. Si k es un entero impar, entonces

$$\frac{\pi}{2} J_0(c_k) = -(K_1 - K_0) - (K_3 - K_2) - \dots - (K_k - K_{k-1}) < 0;$$

pero si k es par,

$$\frac{\pi}{2} J_0(c_k) = K_0 + (K_2 - K_1) + \dots + (K_k - K_{k-1}) > 0.$$

La función continua $J_0(x)$ toma, por tanto, valores positivos en los puntos alternos $x = \frac{1}{2}\pi, x = 2\pi + \frac{1}{2}\pi, \dots$ del conjunto infinito de puntos $x = K\pi + \frac{1}{2}\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) y valores negativos en los demás puntos de ese conjunto. En consecuencia, existe al menos un punto x_k en cada intervalo entre puntos consecutivos de ese conjunto

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi < x_k < \left(k + \frac{3}{2}\right)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

tal que $J_0(x_k) = 0$.

Ahora bien, como J_0 es una función analítica de x que no es idénticamente cero, podrá tener como máximo un número finito de ceros en cualquier intervalo acotado. Por tanto, las raíces positivas de la

ecuación $J_0(x) = 0$ consisten en un conjunto infinito de números x_m ($m = 1, 2, \dots$) tales que $x_m \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$.

La Tab. 1 da los valores, con cuatro cifras significativas exactas, de los cinco primeros ceros de $J_0(x)$ y los valores correspondientes de $J_1(x)$. En los libros citados en la Bibliografía ¹ se encuentran extensas tablas de valores numéricos de las funciones de Bessel y sus ceros.

TABLA 1. $J_0(x_m) = 0$

m	1	2	3	4	5
x_m	2,405	5,520	8,654	11,79	14,93
$J_1(x_m)$	0,5191	-0,3403	0,2715	-0,2325	0,2065

75. Ceros de otras funciones. Si para algún par de números positivos b y c se verifica que $J_n(b) = 0$ y $J_n(c) = 0$, es entonces $x^{-n}J_n(x)$ también cero cuando $x = b$ y cuando $x = c$. Teniendo en cuenta el teorema de Rolle se deduce que la derivada de $x^{-n}J_n(x)$ se anula para al menos un valor de x entre b y c . Pero como (Sec. 71),

$$\frac{d}{dx} [x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

hay al menos un cero de $J_{n+1}(x)$ entre dos ceros positivos de $J_n(x)$. Como antes, puede tener a lo más un número finito de ceros en cualquier intervalo acotado porque es una función analítica para todos los valores de x .

Hemos demostrado que los ceros positivos de $J_0(x)$ constituyen una sucesión de números infinita no-acotada. Resulta ahora que los ceros de $J_1(x)$ deben formar un conjunto semejante, que lo mismo es cierto de $J_2(x)$, etc. Esto es, para cada entero positivo fijo n el conjunto de todas las raíces positivas de la ecuación $J_n(x) = 0$ es una sucesión infinita $x = x_{nk}$ ($k = 1, 2, \dots$), donde $x_{nk} \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$.

La Fig. 22 muestra las gráficas de $J_0(x)$ y $J_1(x)$.

La función $y = J_n(x)$ satisface la ecuación de Bessel, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con el origen como punto singular. Según el teorema de unicidad (Sec. 19), existe solo una solución que satisface las condiciones $y(c) = y'(c) = 0$ donde $c > 0$; esta solución es idénticamente nula. En consecuencia, no existe ningún número positivo c tal que $J_n(c) = J'_n(c) = 0$. Esto es, $J'_n(x)$ no puede anularse en un cero positivo de $J_n(x)$; es decir, $J_n(x)$ debe cambiar su signo en ese punto.

¹ Ver los textos de Johnke y otros, Gray y otros, y Watson.

Designemos por b y c ($0 < b < c$) dos ceros consecutivos de $J_n(x)$. Si $J'_n(b) > 0$, entonces $J_n(x) > 0$ cuando $b < x < c$ y $J_n(x)$ es decreciente en su cero c ; esto es, $J'_n(c) < 0$. Análogamente, si $J'_n(b) < 0$, entonces $J'_n(c) > 0$ de forma que los valores de J'_n cambian de signo en los ceros positivos consecutivos de J_n .

Consideremos ahora la ecuación

$$(1) \quad hJ_n(x) + xJ'_n(x) = 0,$$

donde h es real y constante. Si b y c son ceros positivos consecutivos de $J_n(x)$, la función $hJ_n(x) + xJ'_n(x)$ tiene los valores $bJ'_n(b)$ y $cJ'_n(c)$ en los puntos $x = b$ y $x = c$, respectivamente. Como uno de esos

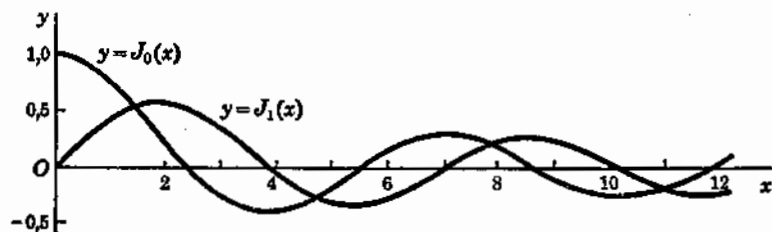


FIG. 22

valores es positivo y el otro negativo, esa función se anula en algún punto, o en algún número finito de puntos, entre b y c . La Ec. (1) tiene, por tanto, una sucesión infinita de raíces positivas. Reuniremos nuestros resultados principales como sigue.

Teorema 2. *Para cada valor fijo de n ($n = 0, 1, 2, \dots$) el conjunto de todas las raíces positivas de la ecuación*

$$(2) \quad J_n(x) = 0$$

consiste en una sucesión infinita $x = x_j$ ($j = 1, 2, \dots$) tal que $x_j \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$; además, el conjunto de todas las raíces positivas de la Ec. (1), donde h es una constante, incluyendo el cero, es siempre una sucesión de ese tipo.

Puede verse que $x = 0$ es una raíz tanto de la Ec. (1) como de la (2) si n es un entero positivo. Es también una raíz de la ecuación $J'_0(x) = 0$.

Cuando $x = b$ es una raíz de la Ec. (2), $x = -b$ es asimismo una raíz, ya que $J_n(-b) = (-1)^n J_n(b)$. Esto es igualmente cierto para la Ec. (1), porque con ayuda de la fórmula (Sec. 71)

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

la Ec. (1) puede escribirse

$$(3) \quad (h + n)J_n(x) - xJ_{n+1}(x) = 0.$$

76. Sistemas ortogonales de funciones de Bessel. La ecuación de Bessel

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - n^2)y = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

tiene la solución particular $y = J_n(t)$. Como se indicó en la Sec. 68, empleando notación diferente, en términos de las variables x y X , donde $t = \lambda x$ e $y(t) = X(x)$, la ecuación toma la forma

$$x^2 X''(x) + xX'(x) + (\lambda^2 x^2 - n^2)X(x) = 0.$$

La forma auto-adjunta de esta ecuación es

$$(1) \quad (xX')' + \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x} \right) X = 0,$$

y $X(x) = J_n(\lambda x)$ es una solución particular.

Para cada valor fijo de n ($n = 0, 1, 2, \dots$), la Ec. (1) es un caso particular de la ecuación de Sturm-Liouville (4), Sec. 32, con el parámetro autovalor escrito λ^2 en lugar de λ . En este caso especial $r(x) = x$ y $q(x) = -n^2/x$.

Consideremos el problema singular de Sturm-Liouville, en un intervalo $(0, c)$ consistente en la Ec. (1), una condición de contorno

$$(2) \quad b_1 X(c) + b_2 X'(c) = 0,$$

y la exigencia de que X y X' sean continuas a lo largo del intervalo cerrado $0 \leq x \leq c$. Las constantes b_1 y b_2 son reales. El extremo $x = 0$ es el punto singular de la ecuación diferencial, además, q es allí discontinua a menos que $n = 0$.

Este problema tiene una sucesión infinita de autovalores reales para λ , como ahora demostraremos. La solución de la Ec. (1) que satisface las exigencias de continuidad dichas es, aparte de un factor constante arbitrario, $X = J_n(\lambda x)$.

Acordemos que el símbolo $J'_n(\lambda x)$ representa la derivada J_n con respecto al argumento de J_n :

$$J'_n(\lambda x) = \frac{d}{d(\lambda x)} J_n(\lambda x).$$

Entonces, $d/dx[J_n(\lambda x)] = \lambda J'_n(\lambda x)$ y la condición (2) se convierte en

$$(3) \quad b_1 J_n(\lambda c) + b_2 \lambda J'_n(\lambda c) = 0.$$

En el importante caso especial $b_2 = 0$ la condición es

$$(4) \quad J_n(\lambda c) = 0.$$

Cuando $b_2 \neq 0$, se pueden multiplicar los dos miembros de (3) por c/b_2 lo que da

$$(5) \quad hJ_n(\lambda c) + \lambda c J'_n(\lambda c) = 0.$$

Hemos demostrado en la Sección precedente que existen sucesiones infinitas de valores positivos de λc que satisfacen las Ecs. (4) y (5). Si designamos cada sucesión por x_j ($j = 1, 2, \dots$) sin olvidarnos de que los números x_j dependen de los valores de n , b_1 y b_2 , se tiene que λ es un autovalor si $\lambda c = x_j$; esto es,

$$(6) \quad \lambda_j = \frac{x_j}{c} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

son autovalores reales. Las autofunciones correspondientes son

$$(7) \quad X_j(x) = J_n(\lambda_j x) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Cada raíz negativa $\lambda = -\lambda_j$ de las Ecs. (4) ó (5) da la misma autofunción, aparte del factor $(-1)^n$, que la raíz positiva correspondiente λ_j .

Cuando $n = 1, 2, \dots$, el cero no es un autovalor porque $J_n(\lambda x)$ es idénticamente nula si $\lambda = 0$. Si $n = 0$, entonces $\lambda = 0$ no es una solución de la Ec. (4), ni tampoco lo es de la (5), a menos que también sea $h = 0$.

Cuando $n = h = 0$, la Ec. (5) puede escribirse $J'_0(\lambda c) = 0$ ó $J_1(\lambda c) = 0$, y la autofunción correspondiente a la raíz $\lambda = 0$ es $J_0(0)$; esto es

$$X(x) = 1 \quad \text{cuando } \lambda = 0 \quad (n = h = 0).$$

Este es el único caso en el que $\lambda = 0$ es un autovalor.

Según se deduce de la serie de potencias que representan a J_n la función $i^{-n}J_n(ix)$ tiene solamente valores reales positivos cuando $x > 0$ (Prob. 4, Sec. 71). Por tanto, la Ec. (4) carece de raíces imaginarias puras $\lambda = i\mu$ (μ real).

Desde ahora en adelante supondremos que $h \geq 0$ en la Ec. (5), como generalmente ocurre en las aplicaciones. Como esa ecuación puede escribirse en la forma (3), Sec. 75,

$$(8) \quad (h + n)J_n(\lambda c) - \lambda c J_{n+1}(\lambda c) = 0 \quad (h \geq 0)$$

y como $h + n \geq 0$, la serie de potencias que representan J_n y J_{n+1} muestra que la ecuación carece de raíces imaginarias puras λ .

Resulta, pues, que el problema de autovalores consistente en las Ecs. (1) y (2), donde $b_1 b_2 \geq 0$, carece de autovalores imaginarios puros λ .

Los casos (a) de los teoremas 3 y 4, Sec. 33, dan las condiciones para que nuestro problema singular de Sturm-Liouville posea autofunciones ortogonales y autovalores reales λ^2 . Obsérvese que las demostraciones de los teoremas no dependen de la continuidad de $q(x)$ en el extremo $x = a$ ($a = 0$ en nuestro caso especial) cuando X y X' sean continuas en el intervalo cerrado. Esta continuidad requiere que se emplee la solución $X = J_n(\lambda x)$ de la Ec. (1), aun en el caso de que λ sea compleja, ya que $Y_n(\lambda x)$ tiene el mismo tipo de discontinuidad que $\log \lambda x$ en $x = 0$, mientras que la convergencia de la serie de potencias para $J_n(\lambda x)$ y $J'_n(\lambda x)$ asegura la continuidad de esas funciones para todos los valores de λx .

De acuerdo con el Teorema 4, Sec. 33, todos los autovalores de λ^2 son reales. Hemos visto que la propia λ no puede ser imaginaria pura; por tanto, los autovalores de λ son todos reales. Y esos valores reales están todos representados por los números λ_j dados por la Ec. (6), donde $\lambda_j > 0$, con la excepción de que $\lambda_1 = 0$ en el caso especial $n = h = 0$. Dispongamos ahora esos autovalores en orden ascendente de magnitud de modo que $\lambda_j < \lambda_{j+1}$.

El Teorema 3, Sec. 33, da la propiedad de ortogonalidad

$$(9) \quad \int_0^c x J_n(\lambda_j x) J_n(\lambda_k x) dx = 0 \quad (\lambda_j \neq \lambda_k).$$

Obsérvese que esta ortogonalidad de las autofunciones con función peso x en el intervalo $(0, c)$ es la misma que la ortogonalidad ordinaria de las funciones $\sqrt{x} J_n(\lambda_j x)$. Nótese además que de esa forma se tiene la representación de muchos sistemas ortogonales, según se den valores a n , b_1 , b_2 y c .

Resumimos nuestros resultados en el siguiente teorema.

Teorema 3. Si n tiene uno de los valores $0, 1, 2, \dots$, la sucesión de funciones $\{J_n(\lambda_j x)\}$ ($j = 1, 2, \dots$) es ortogonal en el intervalo $(0, c)$ con función peso x cuando los valores de $\lambda = \lambda_j$ son (a) las raíces positivas de la ecuación $J_n(\lambda c) = 0$, ó (b) las raíces positivas de la Ec. (5) donde $h \geq 0$ y h y n no son a la vez nulas, ó (c) en el caso $h = n = 0$, entonces $\lambda_1 = 0$ y λ_2, λ_3 son las raíces positivas de la ecuación $J'_0(\lambda c) = 0$.

Los números indicados λ_j son todos los autovalores de λ , y $X = J_n(\lambda_j x)$ son las autofunciones, del problema singular de Sturm-Liouville con-

sistente en la ecuación de Bessel (1) en unión de la condición de contorno

$$(10) \quad X(c) = 0$$

en el caso (a); o en el caso (b), la condición de contorno

$$(11) \quad hX(c) + cX'(c) = 0 \quad (h \geq 0, h^2 + n^2 > 0);$$

o en el caso (c), donde $n = 0$, la condición

$$(12) \quad X'(c) = 0.$$

77. Las funciones ortonormales. La función

$$X(x) = J_n(\lambda x)$$

satisface la ecuación

$$(1) \quad (xX')' + \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x} \right) X = 0.$$

Multiplicando por el factor $2xX'$ se tiene

$$\frac{d}{dx} (xX')^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2) \frac{d}{dx} (X^2) = 0.$$

Después de integrar ambos términos y haciendo uso de la integración por partes en el segundo, se llega a

$$[(xX')^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2)X^2]_0^c = 2\lambda^2 \int_0^c xX^2 dx.$$

Como $X = J_n(\lambda x)$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$, la cantidad dentro de los corchetes se anula cuando $x = 0$ y la ecuación puede escribirse

$$(2) \quad 2\lambda^2 \int_0^c x[J_n(\lambda x)]^2 dx = \lambda^2 c^2 [J'_n(\lambda c)]^2 + (\lambda^2 c^2 - n^2) [J_n(\lambda c)]^2.$$

Con excepción del único caso en que $\lambda = 0$, la fórmula (2) da las normas de nuestras autofunciones.

Cuando λ_j son las raíces positivas de la ecuación

$$(3) \quad J_n(\lambda c) = 0,$$

la fórmula (2) se convierte en

$$2 \int_0^c x [J_n(\lambda_j x)]^2 dx = c^2 [J'_n(\lambda_j c)]^2.$$

Pero hemos visto que

$$rJ'_n(r) = nJ_n(r) - rJ_{n+1}(r)$$

y, por tanto, $\lambda_j c J'_n(\lambda_j c) = -\lambda_j c J_{n+1}(\lambda_j c)$, y de aquí

$$(4) \quad \|J_n(\lambda_j(x))\|^2 = \frac{c^2}{2} [J_{n+1}(\lambda_j c)]^2 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Cuando λ_j son las raíces positivas de la ecuación

$$(5) \quad hJ_n(\lambda c) + \lambda c J'_n(\lambda c) = 0 \quad (h \geq 0),$$

se deduce de la Ec. (2) que

$$(6) \quad \|J_n(\lambda_j x)\|^2 = \frac{\lambda_j^2 c^2 - n^2 + h^2}{2\lambda_j^2} [J_n(\lambda_j c)]^2.$$

Pero en el caso $n = h = 0$, es entonces $\lambda_1 = 0$ y $J_0(\lambda_1 x) = 1$, o sea

$$(7) \quad \|J_0(\lambda_1 x)\|^2 = \int_0^c x dx = 1/2 c^2.$$

Las autofunciones normalizadas de nuestro problema singular de Sturm-Liouville pueden ahora escribirse

$$(8) \quad \phi_{nj}(x) = \frac{J_n(\lambda_j x)}{\|J_n(\lambda_j x)\|} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Aquí, las normas están dadas para los tres tipos de condiciones de contorno por las fórmulas (4), (6) y (7) y el conjunto de autovalores λ_j depende de la condición de contorno usada y del valor de n . El sistema (8) es ortonormal en el intervalo $(0, c)$ con función peso x :

$$\int_0^c x \phi_{nj}(x) \phi_{nk}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

78 Series de Fourier-Bessel. Como las funciones $\phi_{nj}(x)$ constituyen la totalidad de autofunciones normalizadas de nuestro problema singular de Sturm-Liouville, podemos anticipar una representación

de funciones f en el intervalo $(0, c)$ por medio de series de Fourier generalizadas de aquellas funciones ortonormales.

Designemos por c_{nj} ($j = 1, 2, \dots$) los coeficientes de Fourier de una función f con respecto a ϕ_{nj} en el intervalo. Entonces

$$c_{nj} = \int_0^c \phi_{nj}(x)f(x) dx = \frac{1}{\|J_n(\lambda_j x)\|} \int_0^c x J_n(\lambda_j x) f(x) dx,$$

y la serie de Fourier generalizada correspondiente a f es

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} \phi_{nj}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_j x)}{\|J_n(\lambda_j x)\|^2} \int_0^c \xi J_n(\lambda_j \xi) f(\xi) d\xi.$$

Teniendo presente las fórmulas para las normas, encontradas en la Sección precedente, la serie (1) puede escribirse

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_n(\lambda_j x) \sim f(x) \quad (0 < x < c),$$

donde los coeficientes A_{nj} tienen los siguientes valores.

Quando λ_j son las raíces positivas de la ecuación

$$(3) \quad J_n(\lambda c) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(4) \quad A_{nj} = \frac{2}{c^2 [J_{n+1}(\lambda_j c)]^2} \int_0^c x J_n(\lambda_j x) f(x) dx.$$

Quando λ_j son las raíces positivas de la ecuación

$$(5) \quad h J_n(\lambda c) + \lambda c J'_n(\lambda c) = 0 \quad (h \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(6) \quad A_{nj} = \frac{2\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 c^2 - n^2 - h^2) [J_n(\lambda_j c)]^2} \int_0^c x J_n(\lambda_j x) f(x) dx.$$

Sin embargo, en el caso especial $n = h = 0$, la raíz $\lambda = 0$ de la Ec. (5) es también un autovalor. Escribimos entonces $\lambda_1 = 0$, $J_0(\lambda_1 x) = 1$ y el primer término de la serie (2) es la constante

$$(7) \quad A_{01} = \frac{2}{c^2} \int_0^c x f(x) dx.$$

Para demostrar que la serie (2) converge a $f(x)$, cuando f cumple las condiciones que aseguran su representación por sus series de Fourier de senos o cosenos en el intervalo $(0, c)$ se necesita general-

mente recurrir a la teoría de funciones de variable compleja. Enunciaremos, sin demostración, una forma de uno de los teoremas de representación¹.

Teorema 4. Si f es una función que, junto con su derivada f' , es casi continua en el intervalo $(0, c)$ la serie (2) converge entonces al valor medio de f en todo punto interior del intervalo. Es decir,

$$(8) \quad \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_n(\lambda_j x) \quad (0 < x < c),$$

donde los coeficientes A_{nj} están definidos por la Ec. (4) ó la (6) ó la (7), dependiendo de la ecuación particular que determine las raíces de λ_j .

El desarrollo (8) se conoce como representación por serie de Fourier-Bessel de la función $f(x)$.

Los resultados enunciados en los Teoremas 2, 3 y 4 son también válidos cuando n se reemplaza por un número positivo arbitrario ν , aunque no hemos desarrollado las propiedades de las funciones J_ν , lo suficiente para establecer este hecho.

Para las funciones en el intervalo infinito $x > 0$ existe una representación integral en función de J_ν correspondiente a la fórmula integral de Fourier de senos o cosenos². La representación para un ν fijo ($\nu \geq -1/2$),

$$f(x) = \int_0^{\infty} \alpha J_\nu(\alpha x) \int_0^{\infty} \xi J_\nu(\alpha \xi) f(\xi) d\xi d\alpha \quad (x > 0),$$

Conocida como *fórmula integral de Hankel*, es válida en el caso de que f y f' sean casi continuas en cualquier intervalo finito y si $\sqrt{x}f(x)$ es absolutamente integrable de cero a infinito y $f(x)$ está definida por su valor medio en cada punto de discontinuidad.

Si se reemplaza el intervalo $(0, c)$ por otro (a, b) , donde $0 < a < b$, el problema de Sturm-Liouville consistente en la ecuación de Bessel (1), Sec. 76, y una condición lineal homogénea del tipo (2) Sec. 76, en los extremos del intervalo, no es ya singular, sino simplemente un caso especial del problema de Sturm-Liouville. Las autofunciones son combinaciones lineales de las funciones de Bessel J_n e Y_n .

¹ Se demuestra en el libro Watson «Theory of Bessel Functions»; ver también p. 73 de Titchmarsh, «Eigenfunction Expansions», 1946. El libro de Watson trata con más extensión las funciones de Bessel de las diferentes especies; pueden además consultarse los libros de Gray y Bowman.

² Sneddon, «Fourier Transforms» Cap. 2. Ver Cap. 7, tomo 2, de «Higher Transcendental Functions», de Erdélyi y otros, para un resumen de representaciones en términos de funciones de Bessel.

PROBLEMAS

1. Demostrar que para el problema singular de Sturm-Liouville

$$(xX')' + \lambda^2 xX = 0 \quad (0 < x < 2), \\ X(2) = 0,$$

los autovalores $\lambda = \lambda_j$ son las raíces positivas de la ecuación $J_0(2\lambda) = 0$ y que las autofunciones son $X_j = J_0(\lambda_j x)$. Calcular valores numéricos aproximados de los primeros autovalores.

Solución $\lambda_1 = 1, 2, \lambda_2 = 2, 8, \dots$

2. Demostrar que para el problema de autovalores

$$(xX')' + \lambda^2 xX = 0 \quad (0 < x < c), \\ X'(c) = 0,$$

$\lambda_1 = 0$, que $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ son las raíces positivas de la ecuación $J_1(\lambda c) = 0$, y que $X_1(x) = 1$ y $X_j(x) = J_0(\lambda_j x)$ cuando $j = 2, 3, \dots$

3. Representar la función $f(x) = 1$ ($0 < x < c$) en serie de las funciones $J_0(\lambda_j x)$ donde λ_j son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\lambda c) = 0$.

$$\text{Solución } 1 = \frac{2}{c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j x)}{\lambda_j J_1(\lambda_j c)} \quad (0 < x < c).$$

4. En la representación de la función $f(x) = 1$ ($0 < x < c$) por medio de series de las funciones $J_0(\lambda_j x)$ donde λ_j son las raíces no-negativas de $J_0(\lambda c) = 0$, demostrar que $A_1 = j$ y $A_j = 0$ cuando $j = 2, 3, \dots$

5. Si $f(x) = 1$ cuando $0 < x < 1$ y $f(x) = 0$ cuando $1 < x < 2$, y $f(1) = 1/2$, y si λ_j son las raíces positivas de la ecuación $J_0(2\lambda) = 0$, obtener la representación

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_j)}{\lambda_j [J_1(2\lambda_j)]^2} J_0(\lambda_j x) \quad (0 < x < 2).$$

6. Demostrar que para el problema de autovalores

$$(xX')' + \left(\lambda^2 x - \frac{1}{x} \right) X = 0 \quad (0 < x < 1), \\ X(1) = 0,$$

λ_j son las raíces positivas de la ecuación $J_{1/2}(\lambda) = 0$ y que $X_j = J_{1/2}(\lambda_j x)$. Obtener después la siguiente representación de la función $f(x) = x$ ($0 \leq x < 1$) por medio de serie de esas autofunciones

$$x = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{J_{1/2}(\lambda_j x)}{\lambda_j J_{3/2}(\lambda_j)} \quad (0 \leq x < 1).$$

79. Temperaturas en un cilindro largo. Consideremos la superficie lateral $\rho = c$ de un cilindro circular infinitamente largo (Fig. 23) o la de uno de altura finita con bases aisladas. Sea $\rho = c$ su superficie

lateral que se conserva a la temperatura cero. La distribución inicial de temperaturas es una función $f(\rho)$ de la distancia al eje solamente. Deduiremos una fórmula para las temperaturas $u(\rho, t)$ en el cilindro.

La ecuación del calor en coordenadas cilíndricas, y las condiciones de contorno, son

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \quad (0 < \rho < c, t > 0), \\ (2) \quad & u(c-0, t) = 0 \quad (t > 0), \\ (3) \quad & u(\rho+0) = f(\rho) \quad (0 < \rho < c). \end{aligned}$$

Además, cuando $t > 0$ la función u ha de ser continua en todo el volumen del cilindro, en particular a lo largo del eje $\rho = 0$. Supondremos que f y f' son casi continuas en el intervalo $(0, c)$ y, por conveniencia, que f está definida por el valor medio de sus límites en cada punto de discontinuidad.

Las soluciones particulares de las condiciones homogéneas (1) y (2) del tipo $R(\rho)T(t)$ deben satisfacer las ecuaciones

$$RT' = kT(R'' + \rho^{-1}R), \quad R(c)T(t) = 0.$$

Por separación de variables en la primera ecuación, se tiene

$$\frac{T'}{kT} = \frac{1}{R} \left(R'' + \frac{R'}{\rho} \right) = -\lambda^2,$$

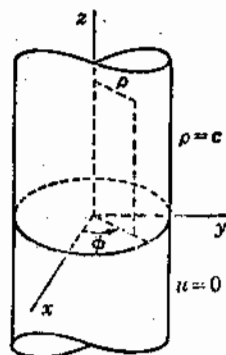


FIG. 23

donde $-\lambda^2$ es alguna constante, todavía sin especificar. Se tiene, pues,

$$\begin{aligned} (4) \quad & T'(t) + \lambda^2 kT(t) = 0 \\ y \quad & \rho R''(\rho) + R'(\rho) + \lambda^2 \rho R(\rho) = 0. \end{aligned}$$

La función $R(\rho)$ debe, por tanto, satisfacer las condiciones

$$(5) \quad (\rho R')' + \lambda^2 \rho R = 0 \quad (0 < \rho < c), \quad R(c) = 0.$$

La ecuación diferencial en R es la ecuación de Bessel con el parámetro λ , en la que $n = 0$. El Prob. (5), junto con las condiciones de continuidad que debe cumplir R en el intervalo $0 \leq \rho \leq c$ es un caso especial del problema singular de Sturm-Liouville consistente en las Ecs. (1) y (2) de la Sec. 76. Según el caso (a) del Teorema 3, los auto-

Valores $\lambda = \lambda_j$ del Prob. (5) son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(\lambda c) = 0$$

y $R = J_0(\lambda_j \rho)$ son las autofunciones.

Cuando $\lambda = \lambda_j$ resulta de la Ec. (4) que $T = \exp(-\lambda_j^2 kt)$ de modo que, aparte de un factor constante,

$$R(\rho)T(t) = J_0(\lambda_j \rho) \exp(-\lambda_j^2 kt) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

La combinación lineal generalizada de estas funciones

$$(7) \quad u(\rho, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\lambda_j \rho) \exp(-\lambda_j^2 kt)$$

satisface formalmente las condiciones homogéneas (1) y (2) de nuestro problema de contorno. También satisface la condición inicial no-homogénea (3) si $u(\rho, +0) = u(\rho, 0)$ y si los coeficientes A_j pueden ser determinados de forma que

$$f(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\lambda_j \rho) \quad (0 < \rho < c).$$

Esta representación es válida, de acuerdo con las series de Fourier-Bessel (Teorema 4), si los coeficientes tienen los valores

$$(8) \quad A_j = \frac{2}{c^2 [J_1(\lambda_j c)]^2} \int_0^c \xi J_0(\lambda_j \xi) f(\xi) d\xi \quad (j = 1, 2, \dots).$$

La solución formal del problema de contorno está, por tanto, representada por la fórmula (7) con los coeficientes (8), donde λ_j son todas las raíces positivas de la Ec. (6). Esto es, nuestra fórmula para la temperatura puede escribirse de la forma siguiente:

$$u(\rho, t) = \frac{2}{c^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{[J_1(\lambda_j c)]^2} \exp(-\lambda_j^2 kt) \int_0^c \xi J_0(\lambda_j \xi) f(\xi) d\xi.$$

Verificación. Podemos establecer la fórmula (7) como una solución de nuestro problema empleando el procedimiento seguido en la Sec. 61 si aplicamos dos propiedades adicionales de los ceros de las funciones de Bessel; a saber, que $\lambda_{j+1} - \lambda_j \rightarrow \pi/c$ cuando $j \rightarrow \infty$, y los

números $[\sqrt{\lambda_j} J_1(\lambda_j c)]^{-1}$ están acotados para todos los valores de j ($j = 1, 2, \dots$)¹.

Al estar f y J_0 acotadas, se sigue de la fórmula (8) que los números A_j/λ_j están también acotados. Existe, por tanto, un número M tal que, para cada número positivo t_0 los valores absolutos de los términos de la serie (7) son menores que los términos constantes

$$M\lambda_j \exp(-\lambda_j^2 kt_0)$$

cuando $0 \leq \rho \leq c$ y $t \geq t_0$. La serie formada por esos términos constantes converge porque $\lambda_{j+1} - \lambda_j \rightarrow \pi/c$ cuando $j \rightarrow \infty$. La serie (7) converge, por tanto, uniformemente con respecto a ρ y t ($t \geq t_0$) y su suma $u(\rho, t)$ es una función continua de sus dos variables cuando $0 \leq \rho \leq c$ y $t > 0$. Pero como $u(c, t) = 0$ la condición (2) queda satisfecha.

Las derivadas de $J_0(x)$ están también acotadas, y la serie de constantes $M\lambda_j^m \exp(-\lambda_j^2 kt_0)$, donde $m = 2, 3, \dots$ converge. Resulta así, del mismo modo, que la serie derivada converge uniformemente cuando $t \geq t_0$, y que, por tanto, la función (7) satisface la ecuación del calor (1).

Finalmente, debido a la convergencia de la serie (7) a $f(\rho)$ cuando $t = 0$, el criterio de Abel es aplicable para demostrar que $u(\rho, +0) = u(\rho, 0)$, cuando $0 < \rho < c$. La condición (3) queda, por consiguiente, satisfecha y nuestra solución, establecida.

80. Transmisión del calor en la superficie del cilindro. Reemplacemos la condición de que la superficie del cilindro infinito está a la temperatura cero por la condición de que el calor se transmite a través de dicha superficie a un medio circundante a temperatura cero. Supongamos que la transmisión del calor en la superficie se hace según una ley lineal, llamada a veces ley de Newton: el flujo a través de la superficie es proporcional a la diferencia de temperaturas de la superficie y el medio ambiente. Entonces, si K es la conductividad del material del cilindro y E la conductividad externa o emisividad en la superficie $\rho = c$

$$-Ku_\rho(c, t) = Eu(c, t).$$

Supondremos que K y E son constantes ($K > 0$, $E \geq 0$), y pondremos $h = cE/k$.

¹ Esas propiedades son consecuencia de una representación asintótica de $J_n(x)$ para valores grandes de x , que puede escribirse

$$\sqrt{\pi x} J_n(x) = \sqrt{2} \cos(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi) + x^{-1}\theta_n(x),$$

donde $\theta_n(x)$ está acotada cuando $x \rightarrow \infty$. La deducción de la fórmula puede verse en el libro de Courant y Hilbert «Methods of Mathematical Physics» tomo 1, p. 526, o Watson, «Theory of Bessel Functions»

El problema de contorno para la función de temperatura u es

$$\begin{aligned} (1) \quad u_t(\rho, t) &= k[u_{\rho\rho}(\rho, t) + \rho^{-1}u_{\rho}(\rho, t)] & (0 < \rho < c, t > 0), \\ (2) \quad cu_{\rho}(c, t) &= -hu(c, t) & (t > 0), \\ (3) \quad u(\rho, 0) &= f(\rho) & (0 < \rho < c). \end{aligned}$$

Por separación de variables resulta el siguiente problema de autovalores en la función $R(\rho)$:

$$\begin{aligned} (4) \quad (\rho R')' + \lambda^2 \rho R &= 0 & (0 < \rho < c), \\ hR(c) + cR'(c) &= 0. \end{aligned}$$

Es, pues, $R = J_0(\lambda\rho)$, donde λ debe satisfacer la ecuación

$$(5) \quad hJ_0(\lambda c) + \lambda cJ_0'(\lambda c) = 0.$$

En el caso de que $h > 0$, λ_j son las raíces positivas de la Ec. (5) y las soluciones de las condiciones homogéneas son

$$R(\rho)T'(t) = J_0(\lambda_j\rho) \exp(-\lambda_j^2 kt) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

La solución de nuestro problema resulta ser

$$(6) \quad u(\rho, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\lambda_j\rho) \exp(-\lambda_j^2 kt),$$

donde, de acuerdo con la condición inicial (3) y el Teorema 4,

$$(7) \quad A_j = \frac{2\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 c^2 + h^2)[J_0(\lambda_j c)]^2} \int_0^c \xi J_0(\lambda_j \xi) f(\xi) d\xi \quad (j = 1, 2, \dots)$$

En el caso de que $h = 0$, $\lambda_1 = 0$ y $J_0(\lambda_1\rho) = 1$ y $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ son las raíces positivas de la ecuación $J_1(\lambda c) = 0$. La fórmula para la temperatura se convierte en

$$(8) \quad u(\rho, t) = A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} A_j J_0(\lambda_j\rho) \exp(-\lambda_j^2 kt),$$

donde (Teorema 4)

$$(9) \quad A_1 = \frac{2}{c^2} \int_0^c \xi f(\xi) d\xi,$$

$$(10) \quad A_j = \frac{2}{c^2 [J_0(\lambda_j c)]^2} \int_0^c \xi J_0(\lambda_j \xi) f(\xi) d\xi \quad (j = 2, 3, \dots).$$

Este es el caso en que la superficie $\rho = c$ está térmicamente aislada.

PROBLEMAS

1. Escribir la fórmula para las temperaturas $u(\rho, t)$ en un cilindro infinito $\rho \leq 1$ con las condiciones $u(1, t) = 0$, $u(\rho, 0) = u_0$ donde u_0 es una constante. Dar valores numéricos aproximados de los primeros coeficientes de la serie.

$$\text{Solución } u = 2u_0[0,80J_0(2,4\rho) \exp(-5,8kt) - 0,53J_0(5,5\rho) \exp(-30kt) + 0,43J_0(8,6\rho) \exp(-75kt) - \dots]$$

2. Sobre un largo cilindro sólido $\rho \leq 1$, a la temperatura uniforme A , se fija apretadamente un largo cilindro hueco $1 \leq \rho \leq 2$ del mismo material a la temperatura B . La superficie exterior $\rho = 2$ se mantiene entonces a la temperatura B . Deducir la siguiente fórmula para las temperaturas en el cilindro de radio 2 formado como se ha dicho

$$u(\rho, t) = B + \frac{A-B}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_j)}{\lambda_j [J_1(2\lambda_j)]^2} J_0(\lambda_j \rho) \exp(-\lambda_j^2 kt),$$

donde λ_j son las raíces positivas de $J_0(2\lambda) = 0$. Este es un problema de temperaturas que se presentan en los ajustes forzados en caliente.

3. Una función $V(\rho, z)$ es armónica en el interior de un cilindro limitado por las superficies $\rho = c$, $z = 0$, y $z = b$. Si $V = 0$ en las dos primeras superficies y $V(\rho, b) = f(\rho)$ ($0 < \rho < c$), deducir la fórmula

$$V(\rho, z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\lambda_j \rho) \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j b},$$

donde λ_j son las raíces positivas de $J_0(\lambda c) = 0$ y los coeficientes A_j están dados por la fórmula (8), Sec. 79.

4. Deducir una fórmula para la distribución estacionaria de temperaturas $u(\rho, z)$ en el cilindro macizo limitado por las superficies $\rho = 1$, $z = 0$ y $z = 1$ si $u = 0$ en la superficie $\rho = 1$, $u = 1$ en la base $z = 1$, y la base $z = 0$ está aislada.

$$\text{Solución } u = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j J_1(\lambda_j)} \frac{\cosh \lambda_j z}{\cosh \lambda_j}, \quad [J_0(\lambda_j) = 0, \lambda_j > 0].$$

5. Un cilindro macizo está limitado por las superficies $\rho = 1$, $z = 0$ y $z = b$. La primera superficie está aislada, la segunda se conserva a la temperatura cero, y la última a las temperaturas $f(\rho)$. Deducir la siguiente fórmula para las temperaturas estacionarias $u(\rho, z)$ en el cilindro

$$u = \frac{2z}{b} \int_0^1 \xi f(\xi) d\xi + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{[J_0(\lambda_j)]^2} \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j b} \int_0^1 \xi J_0(\lambda_j \xi) f(\xi) d\xi,$$

donde $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ son las raíces positivas de $J_1(\lambda) = 0$.

6. Cuando $f(\rho) = A$ ($0 < \rho < 1$) en el Prob. 5 demostrar que $u(\rho, z) = Az/b$.

7. Determinar las temperaturas estacionarias acotadas $u(\rho, z)$ en el cilindro semi-infinito $\rho \leq 1$, $z \geq 0$ si $u = 1$ en la base $z = 0$ y la transmisión de calor

al medio ambiente a temperatura cero, tiene lugar de acuerdo con la ley lineal (Sec. 80), en la superficie $\rho = 1$.

$$\text{Solución } u = 2h \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \exp(-\lambda_j z)}{J_0(\lambda_j)} \frac{1}{\lambda_j^2 + h^2}, \quad [hJ_0(\lambda_j) = \lambda_j J_1(\lambda_j)].$$

8. Resolver el siguiente problema de contorno para $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} xu_t &= (xu_x)_x - n^2 x^{-1} u & (0 < x < c, t > 0), \\ u(c, t) &= 0 & (t > 0), \\ u(x, 0) &= f(x) & (0 < x < c), \end{aligned}$$

donde u es continua cuando $0 \leq x \leq c$ y $t > 0$ y la constante n es un entero no negativo

$$\text{Solución } u = \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_n(\lambda_j x) \exp(-\lambda_j^2 t), \text{ donde } \lambda_j \text{ y } A_{nj}$$

tienen valores indicados por las fórmulas (3) y (4) Sec. 78.

81. Vibración de una membrana circular. A una membrana estirada sobre un bastidor circular fijo $\rho = c$ en el plano $z = 0$ se le ha dado un desplazamiento inicial $z = f(\rho, \phi)$ y desde esa posición se la ha dejado libre. Sus desplazamientos transversales $z(\rho, \phi, t)$, donde ρ , ϕ y z son coordenadas cilíndricas, se pueden determinar como la función continua que satisface a este problema de contorno:

$$\begin{aligned} (1) \quad z_{tt} &= a^2(z_{\rho\rho} + \rho^{-2}z_{\phi\phi} + \rho^{-2}z_{zz}), \\ (2) \quad z(c, \phi, t) &= 0 \quad (-\pi \leq \phi \leq \pi, t \geq 0), \\ (3) \quad z_t(\rho, \phi, 0) &= 0, \quad z(\rho, \phi, 0) = f(\rho, \phi) \\ & \quad (0 \leq \rho \leq c, -\pi \leq \phi \leq \pi). \end{aligned}$$

Una función $z = R(\rho)\Phi(\phi)T(t)$ satisface la Ec. (1) si

$$(4) \quad \frac{T''}{a^2 T} = \frac{1}{R} \left(R'' + \frac{R'}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \Phi'' = -\lambda^2,$$

donde $-\lambda^2$ es una constante cualquiera. Separando de nuevo variables en la Ec. (4) y escribiendo $\Phi''/\Phi = -\mu$, se encuentra que la función $R\Phi T$ satisface todas las condiciones homogéneas y las condiciones periódicas necesarias con respecto a ϕ si

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad T'(0) = 0$$

y si Φ y R son autofunciones de estos dos problemas

$$(5) \quad \Phi''(\phi) + \mu\Phi(\phi) = 0, \quad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \quad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi),$$

$$(6) \quad \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda^2 \rho^2 - \mu)R(\rho) = 0, \quad R(c) = 0.$$

Los autovalores del Prob. (5) son

$$\mu = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

y las autofunciones son $\cos n\phi$ y $\sin n\phi$ incluyendo $\Phi = 1$ cuando $n = 0$ (Sec. 34). Así, pues, para cada valor de n , Φ puede ser cualquier combinación lineal de $\cos n\phi$ y $\sin n\phi$. Cuando $\mu = n^2$ los autovalores del problema (6), o

$$(\rho R')' + (\lambda^2 \rho - n^2 \rho^{-1})R = 0, \quad R(c) = 0,$$

son las raíces positivas $\lambda = \lambda_{nj}$ de la ecuación

$$(7) \quad J_n(\lambda c) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Las autofunciones son $R = J_n(\lambda_{nj}\rho)$ (Sec. 76). La función T es entonces $\cos(\lambda_{nj}at)$.

La combinación lineal generalizada de las funciones $R\Phi T$,

$$(8) \quad z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nj}\rho) (A_{nj} \cos n\phi + B_{nj} \sin n\phi) \cos(\lambda_{nj}at),$$

satisface formalmente todas las condiciones homogéneas. También satisface la condición $z(\rho, \phi, 0) = f(\rho, \phi)$ si pueden determinarse los coeficientes de modo que la serie

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_n(\lambda_{nj}\rho) \right] \cos n\phi + \left[\sum_{j=1}^{\infty} B_{nj} J_n(\lambda_{nj}\rho) \right] \sin n\phi \right\}$$

converja a $f(\rho, \phi)$ cuando $-\pi \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq c$.

Para cada valor fijo de ρ la serie (9) es la serie de Fourier de $f(\rho, \phi)$ en el intervalo $-\pi \leq \phi \leq \pi$ si los coeficientes de $\cos n\phi$ y $\sin n\phi$ son los coeficientes de Fourier; esto es, si

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_n(\lambda_{nj}\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \phi) \cos n\phi \, d\phi & (n = 1, 2, \dots), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \phi) \, d\phi & (n = 0), \\ \sum_{j=1}^{\infty} B_{nj} J_n(\lambda_{nj}\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \phi) \sin n\phi \, d\phi & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Para cada valor fijo de n estas series se convierten en series de Fou-

rier-Bessel representaciones de las funciones de ρ representadas por los segundos miembros de las ecuaciones, en el intervalo $(0, c)$ supuesto que

$$(10) \quad A_{nj} = \frac{2}{\pi c^2 [J_{n+1}(\lambda_{nj}c)]^2} \int_0^c \rho J_n(\lambda_{nj}\rho) \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \phi) \cos n\phi \, d\phi \, d\rho,$$

cuando $n = 1, 2, \dots$, y que

$$(11) \quad A_{0j} = \frac{1}{\pi c^2 [J_1(\lambda_{0j}c)]^2} \int_0^c \rho J_0(\lambda_{0j}\rho) \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \phi) \, d\phi \, d\rho,$$

$$(12) \quad B_{nj} = \frac{2}{\pi c^2 [J_{n+1}(\lambda_{nj}c)]^2} \int_0^c \rho J_n(\lambda_{nj}\rho) \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \phi) \sin n\phi \, d\phi \, d\rho.$$

Los desplazamientos $z(\rho, \phi, t)$ están entonces dados por la fórmula (8) cuando los coeficientes tienen los valores dados por las Ecs. (10), (11) y (12), suponiendo que la función f sea tal que la serie de la fórmula (8) posea las condiciones de convergencia y derivabilidad adecuadas.

PROBLEMAS

1. Supongamos que en el problema anterior la función $f(\rho, \phi)$ que da el desplazamiento inicial es una combinación lineal de un número finito de las funciones $J_n(\lambda_{nj}\rho)$ $\cos n\phi$ y $J_n(\lambda_{nj}\rho)$ $\sin n\phi$. Indicar por qué la serie iterada de la fórmula (8) contiene entonces solo un número finito de términos y representa una solución rigurosa del problema de contorno.

2. En el caso en que el desplazamiento inicial de la membrana de la Sec. 81 sea $f(\rho)$, función de ρ solamente, deducir la fórmula

$$z(\rho, t) = \frac{2}{c^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cos(\lambda_j a t)}{[J_1(\lambda_j c)]^2} \int_0^c \xi J_0(\lambda_j \xi) f(\xi) \, d\xi,$$

donde λ_j son las raíces positivas de $J_0(\lambda c) = 0$.

3. Si el desplazamiento inicial de la membrana de la Sec. 81 es $A J_0(\lambda_k \rho)$, donde λ_k es alguna raíz de $J_0(\lambda c) = 0$, demostrar que

$$z(\rho, t) = A J_0(\lambda_k \rho) \cos(\lambda_k a t).$$

Obsérvese que estos desplazamientos son todos periódicos en t con un período común con el resultado de que la membrana produce una nota musical.

4. Reemplazar las condiciones iniciales (3), Sec. 81 por las condiciones $z = 0$ y $z_t = 1$ cuando $t = 0$. Este es el caso en que la membrana y su bastidor se están moviendo con velocidad unidad en la dirección de las z y se sujeta al bastidor obligándolo al reposo en el momento $t = 0$. Deducir la fórmula

$$z(\rho, t) = \frac{2}{ac} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_j a t)}{\lambda_j^2 J_1(\lambda_j c)} J_0(\lambda_j \rho)$$

de los desplazamientos, donde λ_j son las raíces positivas de $J_0(\lambda c) = 0$.

5. Deducir la siguiente fórmula para las temperaturas $u(\rho, \phi, t)$ en un cilindro infinito $\rho \leq c$ si $u = 0$ en la superficie $\rho = c$ y $u = f(\rho, \phi)$ cuando $t = 0$.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nj}\rho) (A_{nj} \cos n\phi + B_{nj} \operatorname{sen} n\phi) \exp(-\lambda_{nj}^2 kt),$$

donde λ_{nj} , A_{nj} y B_{nj} son los números definidos en la Sec. 81.

6. Deducir una fórmula para las temperaturas $u(\rho, z, t)$ en un cilindro macizo $\rho \leq c$, $0 \leq z \leq \pi$, cuya superficie total se conserva a la temperatura cero y cuya temperatura inicial A es constante. Demostrar que la fórmula puede escribirse

$$u(\rho, z, t) = Av(z, t)w(\rho, t),$$

$$\text{donde } v = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)z}{2n-1} \exp[-(2n-1)^2 kt]$$

y cuando λ_j son las raíces positivas de $J_0(\lambda c) = 0$,

$$w = \frac{2}{c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j J_1(\lambda_j c)} \exp(-\lambda_j^2 kt)$$

Obsérvese que $v(z, t)$ representa temperaturas en $0 \leq z \leq \pi$ en un prisma y $w(\rho, t)$ temperaturas de un cilindro infinito $\rho \leq c$, ambos con temperaturas cero en el contorno y temperatura inicial la unidad.

7. Deducir la siguiente fórmula para la temperatura $u(\rho, \phi, t)$ en una larga cuña cilíndrica de ángulo central recto limitada por la superficie $\rho = 1$ y los planos $\phi = 0$ y $\phi = \frac{1}{2}\pi$ si $u = 0$ en esas tres superficies y $u = f(\rho, \phi)$ cuando $t = 0$:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{nj} J_{2n}(\lambda_{nj}\rho) \operatorname{sen}(2n\phi) \exp(-\lambda_{nj}^2 kt),$$

donde λ_{nj} son las raíces positivas de $J_{2n}(\lambda) = 0$ y

$$B_{nj} [J_{2n+1}(\lambda_{nj})]^2 \pi = 8 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2n\phi \int_0^1 \rho J_{2n}(\lambda_{nj}\rho) f(\rho, \phi) d\rho d\phi.$$

8. Si la cara $\phi = \frac{1}{2}\pi$ de la cuña del Prob. 7 se reemplaza por una cara $\phi = \phi_0$, demostrar que la fórmula para las temperaturas contendrá en general funciones de Bessel J_ν de órdenes *no enteros*.

9. Resolver el Prob. 7 si, en lugar de mantener a la temperatura cero las tres superficies límites de la cuña, estas se encuentran aisladas.

10. Resolver el siguiente problema para las temperaturas $u(\rho, t)$ en una placa circular delgada que transmite calor por sus caras al medio ambiente que se encuentra a temperatura cero

$$u_t = u_{\rho\rho} + \rho^{-1}u_\rho - hu \quad (\rho < 1, t > 0; h > 0) \\ u(1, t) = 0, \quad u(\rho, 0) = 1.$$

$$\text{Solución } u = 2e^{-ht} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j J_1(\lambda_j)} \exp(-\lambda_j^2 t), \quad [J_0(\lambda_j) = 0, \lambda_j > 0].$$

11. Resolver el Prob. 10 después de reemplazar la condición $u(1,t) = 0$ por la siguiente condición de transmisión superficial de calor en la periferia:

$$u_r(1,t) = -h_0 u(1,t) \quad (h_0 > 0).$$

12' Resolver el siguiente problema de Dirichlet para $V(\rho, z)$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 & (\rho < 1, z > 0), \\ V(1, z) &= 0 & (z > 0), \\ V(\rho, 0) &= 1 & (\rho < 1), \end{aligned}$$

donde V ha de estar acotado en el dominio $\rho < 1, z > 0$.

13. Sea $u(\rho, z)$ una función de distribución estacionaria de temperaturas en el cilindro semi-infinito $\rho \leq 1, z \geq 0$ cuya base $z = 0$ está aislada, si $u(1, z) = 1$ cuando $0 < z < 1$ y $u(1, z) = 0$ cuando $z > 1$. Deducir la fórmula.

$$u(\rho, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(i\alpha\rho)}{\alpha J_0(i\alpha)} \cos \alpha z \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha \quad (i = \sqrt{-1}).$$

14. Dada una función $f(z)$ que está representada por su fórmula integral de Fourier para todos los valores reales de z , deducir la siguiente fórmula para la función armónica $V(\rho, z)$ en el interior del cilindro $\rho = c$ tal que $V(c, z) = f(z)$, $-\infty < z < \infty$:

$$V = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(i\alpha\rho)}{J_0(i\alpha c)} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos [(z - \xi)] \, d\xi \, d\alpha.$$

POLINOMIOS DE LEGENDRE Y SUS APLICACIONES

-82. **Deducción de los polinomios de Legendre.** La separación de variables en la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas r y θ , después de poner x en lugar de $\cos \theta$, conduce a la *ecuación de Legendre*.

$$(1) \quad (1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0,$$

Como veremos posteriormente (Sec. 89). Los puntos $x = 1$ y $x = -1$, correspondientes a $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, son puntos singulares de esta ecuación diferencial. Demostraremos ahora que existe un cierto conjunto infinito de valores del parámetro λ para cada uno de los cuales la Ec. (1) tiene a un polinomio como solución particular.

Para determinar si la ecuación de Legendre tiene una solución representada por una serie de potencias, sustituiremos

$$(2) \quad y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

en la Ec. (1). Esta sustitución da la ecuación

$$\sum_{j=0}^{\infty} [j(j-1)x^{j-2}(1-x^2) - 2jx^j + \lambda x^j] a_j = 0,$$

o, puesto que $-j(j-1) - 2j = -j(j+1)$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} [\lambda - j(j+1)] a_j x^j + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = 0.$$

En la última serie, poniendo $k = j + 2$, se obtiene

$$(3) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \{[\lambda - j(j+1)]a_j + (j+2)(j+1)a_{j+2}\}x^j = 0.$$

La Ec. (3) es una identidad en x si los coeficientes a_j , que son funciones de λ , satisfacen la ecuación de recurrencia

$$(4) \quad a_{j+2} = -\frac{\lambda - j(j+1)}{(j+1)(j+2)} a_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

La serie de potencias (2) representa entonces una solución de la ecuación de Legendre dentro de su intervalo de convergencia supuesto que sus coeficientes satisfacen la relación (4). Esta deja a a_0 y a_1 como constantes arbitrarias. Y, además si $a_0 = 0$, es $a_{2j} = 0$, mientras que si $a_1 = 0$, entonces $a_{2j-1} = 0$, cuando $j = 1, 2, \dots$

Pero según la relación (4) está claro que cuando λ tiene cualquier valor del conjunto

$$(5) \quad \lambda = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

es entonces $a_{n+2} = 0$, y, por consiguiente, $a_{n+4} = a_{n+6} = \dots = 0$. Si el n entero es impar y damos a a_0 el valor cero de modo que $a_{2j} = 0$ y si $a_1 \neq 0$, entonces los únicos coeficientes no nulos son $a_1, a_3, a_5, \dots, a_n$. Esto es, la serie se reduce a un polinomio de grado n que contiene únicamente potencias impares de x . Si n es par y $a_1 = 0$ mientras que $a_0 \neq 0$, la serie se reduce a un polinomio de grado n que solo contiene potencias pares de x .

Por tanto, cuando $\lambda = n(n+1)$, existe siempre un polinomio solución de la Ec. (1). No aparecen problemas en cuanto a convergencia o continuidad.

Si $n = 0$, el polinomio es una constante a_0 ; si $n = 1$, es $a_1 x$. Cuando $n = 2, 3, \dots$ y $\lambda = n(n+1)$, la relación de recurrencia (4) puede escribirse

$$(6) \quad a_{j+2} = -\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+1)(j+2)} a_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-2).$$

Obsérvese que a_j , coeficiente de x^j , es una función $a_j(n)$ de n . Poniendo $k = j + 2$, y despejando a_{k-2} :

$$(7) \quad a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n+k-1)} a_k \quad (k = 2, 3, \dots, n).$$

Sea n par o impar, la fórmula (7) da los coeficientes del polinomio en función de a_n , ya que

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n,$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} = (-1)^2 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2(2!)(2n-1)(2n-3)} a_n,$$

y así sucesivamente. Esto es

$$(8) \quad a_{n-2j} = \frac{(-1)^j}{2^j j!} \frac{n(n-1) \cdots (n-2j+1)}{(2n-1)(2n-3) \cdots (2n-2j+1)} a_n.$$

Aquí a_n , es decir, $a_n(n)$, queda al arbitrio. Démosle el valor

$$a_n = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots (3)(1)}{n!}.$$

Entonces, después de reducir las expresiones factoriales, se comprueba que puede ponerse

$$(9) \quad a_{n-2j} = \frac{(-1)^j}{2^j j!} \frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!(n-j)!}.$$

Se emplea la convención que $0! = 1$. Si n es par, el polinomio comienza con un término constante a_0 dado por la fórmula (9) cuando $j = \frac{1}{2}n$. Si n es impar, el término de menor grado es a_1x , donde a_1 está dado por la fórmula (9) cuando $j = \frac{1}{2}(n-1)$.

Un polinomio solución de la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

para cualquier x es, por tanto,

$$y = P_n(x)$$

si $P_n(x)$ es el *polinomio de Legendre* de grado n :

$$(10) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!} \frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!(n-j)!} x^{n-2j},$$

donde $m = \frac{1}{2}n$ si n es par o cero y $m = \frac{1}{2}(n-1)$ si es impar. Una fórmula más sencilla para P_n se encontrará en la Sec. 84.

De acuerdo con la definición (10), los primeros polinomios son

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

83. Ortogonalidad. La forma autoadjunta de la ecuación de Legendre es

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0.$$

Es un caso especial de la ecuación de Sturm-Liouville (4), Sec. 32, en la que $r(x) = 1 - x^2$, $p(x) = 1$ y $q(x) = 0$. Al ser $r(-1) = 0$ y $r(1) = 0$, no son necesarias condiciones de contorno en los extremos del intervalo $-1 \leq x \leq 1$ para completar el problema singular de Sturm-Liouville en ese intervalo; el problema consiste en la Ec. (1) y la condición de que y e y' sean continuas en dicho intervalo cerrado.

De acuerdo con el Teorema 3, Sec. 33, si dos de tales funciones continuas y_m e y_n satisfacen la Ec. (1) cuando $\lambda = \lambda_m$ y $\lambda = \lambda_n$, respectivamente, donde $\lambda_m \neq \lambda_n$, entonces y_m es ortogonal a y_n en el intervalo $(-1, 1)$ con función peso $p(x) = 1$. Hemos demostrado que el polinomio P_n satisface la Ec. (1) cuando $\lambda = n(n+1)$. Puesto que P_n y sus derivadas son continuas para todo valor de x , resulta que

$$(2) \quad \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n; m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Este problema singular de Sturm-Liouville en el intervalo $(-1, 1)$ tiene, por tanto, los autovalores

$$(3) \quad \lambda = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

y las correspondientes autofunciones

$$(4) \quad y = P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

satisfacen las propiedades de ortogonalidad (2). Con la notación empleada para los productos interiores, esta propiedad se expresa $(P_m, P_n) = 0$, $m \neq n$.

Demostraremos (Secs. 87 y 88) que siempre que una función f , junto con su derivada f' , sean casi continuas en el intervalo $(-1, 1)$, se verifica que en todo punto x interior al intervalo donde f sea continua, la serie de Fourier generalizada de f correspondiente a la suce-

sión ortogonal $\{P_n(x)\}$ converge a $f(x)$. Por consiguiente, la sucesión $\{P_n(x)\}$ es cerrada en el sentido de convergencia puntual, y por tanto completa en la clase de todas las funciones f . De ello resulta que *no puede haber otros autovalores que los del conjunto (3)*. Porque supongamos que $y_0(x)$ es una autofunción (continua en unión con y'_0 en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$) correspondiente a otro autovalor λ_0 . Entonces, $(y_0, P_n) = 0$ para cualquier n , y la completitud de la sucesión $\{P_n\}$ requiere que $y_0(x) = 0$ para todas las x en el intervalo abierto, de modo que y_0 no puede ser una autofunción.

Como $P_n(x)$ es un polinomio que contiene solamente potencias de x pares si n es par, y solamente potencias impares de x si n es impar, resulta que $P_n(x)$ es una función par o impar según que n sea par o impar; esto es,

$$(5) \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Por consiguiente, el producto $P_m(x) P_n(x)$, en el que m y n son ambos pares o ambos impares es una función par. De la propiedad (2) se deduce que

$$(6) \quad \int_0^1 P_{2m}(x) P_{2n}(x) dx = 0 \quad (m \neq n; m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(7) \quad \int_0^1 P_{2m+1}(x) P_{2n+1}(x) dx = 0 \quad (m \neq n; m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

La condición (6) expresa que la sucesión $\{P_{2n}\}$ de polinomios de grado par es ortogonal en el intervalo $(0,1)$. Siendo $P'_{2n}(0) = 0$, esos polinomios son las autofunciones del problema singular de Sturm-Liouville consistente en la ecuación de Legendre (1) en el intervalo $(0,1)$ y la condición

$$(8) \quad y'(0) = 0,$$

junto con la condición de que y e y' sean continuas cuando $0 \leq x \leq 1$. Los autovalores son $\lambda = 2n(2n + 1)$.

Análogamente, de acuerdo con la condición (7), la sucesión $\{P_{2n+1}\}$ de polinomios de grado impar es ortogonal en el intervalo $(0,1)$. Esos polinomios son las autofunciones del problema consistente en la Ec. (1), en las condiciones de continuidad en el intervalo cerrado, y la condición de contorno

$$(9) \quad y(0) = 0.$$

Los autovalores son $\lambda = (2n + 1)(2n + 2)$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$

A las series básicas de Fourier de senos y cosenos siguieron las representaciones por series de Fourier de senos y cosenos en semiintervalos. De igual manera, la representación de funciones en el intervalo $(0,1)$ en función de P_{2n} , o bien P_{2n+1} tiene como origen la representación en función de P_n en el intervalo $(-1,1)$.

Todavía es preciso introducir nuevas fórmulas para $P_n(x)$ antes de que podamos establecer el teorema de desarrollo y ciertas propiedades de orden necesarias en la aplicación de los polinomios ¹. En primer lugar, algunas observaciones sobre otras soluciones de la ecuación de Legendre.

En la Sección precedente se encontraron los polinomios P_n haciendo igual a cero una de las dos constantes arbitrarias a_0 ó a_1 de la serie. Si se dejan arbitrarias a esas constantes, la serie da la solución general de la ecuación de Legendre cuando $\lambda = n(n+1)$, en la forma

$$(10) \quad y = AP_n(x) + BQ_n(x),$$

donde Q_n es la *función de Legendre de segunda clase o especie*. Cuando $|x| < 1$, $Q_n(x)$ está representada por una serie de potencias de x cuyos coeficientes se encuentran sirviéndose de la relación de recurrencia (6), Sec. 82. Pero Q_n no es continua en los extremos del intervalo $(-1,1)$. Cuando λ tiene un valor arbitrario, pueden escribirse dos soluciones fundamentales de la ecuación de Legendre en el intervalo $-1 < x < 1$ como series de potencias de x empleando la relación de recurrencia (4), Sec. 83.

84. Fórmula de Rodrigues. Normas. El resultado de integrar el polinomio $P_n(x)$ definido por la Ec. (10), Sec. 82, n veces entre 0 y t es el siguiente polinomio, $S_{2n}(t)$ de grado $2n$:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} \times \frac{t^{2n-2j}}{(n-2j+1)(n-2j+2) \cdots (2n-2j)}$$

En función de los coeficientes binómicos

$$(1) \quad S_{2n}(t) = \frac{1}{2^{2n} n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!} (t^2)^{n-j}.$$

La potencia más baja de t en $S_{2n}(t)$ es t^{2n-2m} , esto es, t^n si n es par, ó t^{n+1} si n es impar. Si la suma de la Ec. (1) se extiende de modo que abarque desde $j=0$ á $j=n$, representa entonces el desarrollo binó-

¹ El lector que desee pasar a las aplicaciones en este momento puede leer el Teorema 1 (Sec. 86) y la Sec. 87 y continuar con la Sec. 89.

mico de $(t^2 - 1)^n$. El polinomio adicional que se introduce es de grado menor que n , uno cuya derivada enésima es cero. Al ser $P_n(t)$ la derivada enésima de $S_{2n}(t)$, resulta que $P_n(t)$ es también la derivada enésima de $(2^n n!)^{-1}(t^2 - 1)^n$; esto es,

$$(2) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Esta es la *fórmula de Rodrigues* para los polinomios de Legendre. Poniendo u en lugar de $x^2 - 1$ se tiene

$$u^n = (x^2 - 1)^n = (x + 1)^n (x - 1)^n.$$

Aplicando la regla de Leibnitz para la derivada enésima D^n de un producto

$$D^n(u^n) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} D^k[(x+1)^n] D^{n-k}[(x-1)^n],$$

donde $D^k w = w$. Únicamente el primer término ($k=0$) de esta suma no contiene el factor $x-1$. Por consiguiente, cuando $x=1$, el valor de la suma es $n!2^n$. Según la fórmula de Rodrigues se verifica que

$$(3) \quad P_n(1) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Se puede deducir de la fórmula de Rodrigues una relación de recurrencia para P_n , observando primero que

$$2^{n+1}(n+1)!P_{n+1} = D^{n+1}(u^{n+1}) = D^{n-1}(D^2 u^{n+1}),$$

pero $Du^{n+1} = 2(n+1)xu^n$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad D^2 u^{n+1} &= 2(n+1)(u^n + 2nx^2 u^{n-1}) \\ &= 2(n+1)[u^n + 2n(x^2 - 1)u^{n-1} + 2nu^{n-1}] \\ &= 2(n+1)[(2n+1)u^n + 2nu^{n-1}]. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$2^n n! P_{n+1} = (2n+1)D^{n-1}u^n + 2nD^{n-1}u^{n-1};$$

esto es,

$$(4) \quad P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{2^n n!} D^{n-1}u^n.$$

Con ayuda de la regla de Leibnitz se puede escribir

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{D^n(Du^{n+1})}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{D^n(xu^n)}{2^{n+1}n!} \\ &= \frac{x D^n u^n + n D^{n-1} u^n}{2^{n+1}n!} = x P_n + \frac{n}{2^{n+1}n!} D^{n-1} u^n. \end{aligned}$$

Eliminando $D^{n-1}u^n$ entre esta ecuación y la Ec. (4) se obtiene la *relación de recurrencia*

$$(5) \quad (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x) \quad (n=1, 2, \dots).$$

Como consecuencia inmediata de la Ec. (4),

$$(6) \quad P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad (n=1, 2, \dots).$$

La relación (5), escrita en la forma

$$(7) \quad nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \quad (n=2, 3, \dots),$$

puede utilizarse para hallar las normas de los polinomios ortogonales P_n en el intervalo $(-1, 1)$. Al ser $(P_n, P_{n-2}) = 0$ y ser idénticas las integrales que representan a (P_n, xP_{n-1}) y a (xP_n, P_{n-1}) , se deduce de las fórmulas (7) y (5) que

$$(P_n, P_n) = \frac{2n-1}{n} (xP_n, P_{n-1}) = \frac{2n-1}{2n+1} (P_{n-1}, P_{n-1}),$$

y continuando el cálculo

$$\begin{aligned} (P_n, P_n) &= \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2n-3}{2n-1} (P_{n-2}, P_{n-2}) = \frac{2n-5}{2n+1} (P_{n-2}, P_{n-2}) \\ &= \dots = \frac{2n-(2n-1)}{2n+1} (P_0, P_0) = \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

Este resultado se comprueba fácilmente en el caso de $n=0$ ó $n=1$ y, por consiguiente,

$$(8) \quad \|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

PROBLEMAS

1. Establecer las propiedades de $P_n(x)$:

$$(a) P_n(-1) = (-1)^n; \quad (b) P_{2n+1}(0) = 0;$$

$$(c) P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}; \quad (d) P'_{2n}(0) = 0.$$

2. Dibujar las gráficas de $P_0(x)$, $P_1(x)$, y $P_2(x)$.

3. Comprobar directamente que el sistema de tres polinomios, $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ es ortogonal en el intervalo $(-1, 1)$.

4. En la Sec. 82, dar los detalles de la reducción de la fórmula (8) a la forma (9) cuando a_n tiene el valor allí dado.

5. Partiendo de la fórmula (6), Sec. 84, obtener la fórmula de integración

$$\int_x^1 P_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2n+1} [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

6. Deducir de la ortogonalidad de la sucesión $\{P_n\}$ por qué

$$(a) \int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0 \text{ cuando } n = 1, 2, \dots;$$

$$(b) \int_{-1}^1 (Ax + B)P_n(x) dx = 0 \text{ cuando } n = 2, 3, \dots \text{ (A, B constante)}$$

7. ¿Por qué es la sucesión de funciones $\{\sqrt{4n+1} P_{2n}(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ortonormal en el intervalo $(0, 1)$?

8. ¿Por qué es la sucesión de funciones $\{\sqrt{4n+3} P_{2n+1}(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ortonormal en el intervalo $(0, 1)$?

85. Formas integrales. De ciertas representaciones de los polinomios $P_n(x)$ por medio de integrales, se deducen órdenes de magnitud de los mismos con respecto a n ó x que resultan útiles en las aplicaciones.

En la Sec. 31 vimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\phi} d\phi = 0 \quad \text{cuando } m = 1, 2, \dots$$

y el valor de la integral es 2π cuando $m = 0$. Si $r = r(x)$, donde la variable x es independiente de ϕ , resulta del desarrollo del binomio $(x + re^{i\phi})^n$ que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + re^{i\phi})^n d\phi = x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

En consecuencia, si $p(x)$ es un polinomio cualquiera en x , se tiene

$$(1) \quad p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x + re^{i\phi}) d\phi.$$

Todas las derivadas de $p(x)$ son también polinomios. Se obtiene después de una integración por partes

$$\begin{aligned} 2\pi p^{(n)}(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} p^{(n)}(x + re^{i\phi}) d\phi = \\ &= \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\phi} p^{(n-1)}(x + re^{i\phi}) d\phi \quad [r(x) \neq 0]. \end{aligned}$$

Continuando la integración por partes se llega a

$$(2) \quad p^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\phi} p(x + re^{i\phi}) d\phi$$

válida siempre que $r(x) \neq 0$. Los detalles quedan para los problemas.

Definiremos ahora p y r como sigue

$$(3) \quad p(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^n, \quad r(x) = i(1 - x^2)^{1/2}.$$

Después de simplificaciones elementales se llega a

$$(4) \quad n! p(x + re^{i\phi}) = r^n e^{in\phi} (x + r \cos \phi)^n.$$

La fórmula de Rodrigues puede escribirse ahora $P_n(x) = p^{(n)}(x)$. De acuerdo con las Ecs. (2) y (4), tiene P_n la *representación integral*

$$\begin{aligned} (5) \quad P_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \phi)^n d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \phi)^n d\phi. \end{aligned}$$

Obsérvese que la fórmula es correcta cuando $x = \pm 1$, y, por consiguiente, lo es para todo valor de x .

Cuando $x = \cos \theta$, la fórmula (5) toma la forma

$$(6) \quad P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos \phi)^n d\phi \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Tomando $\pi - \phi$ como variable de integración en el semi-intervalo

$(1/2\pi, \pi)$, se puede escribir la integral como sigue

$$\int_0^{\pi/2} [(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos \phi)^n + (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta \cos \phi)^n] d\phi.$$

Siendo $(\bar{z})^n$ el complejo conjugado de z^n , el integrando es dos veces la parte real de su primer término, por tanto,

$$(7) \quad P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathcal{R}[(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos \phi)^n] d\phi \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Además, $|\mathcal{R}(z)| \leq |z|$; por consiguiente,

$$|P_n(\cos \theta)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \phi)^{n/2} d\phi;$$

esto es,

$$(8) \quad |P_n(\cos \theta)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi)^{n/2} d\phi.$$

De la condición (8) se deduce que $|P_n(\cos \theta)| \leq 1$, ó

$$(9) \quad |P_n(x)| \leq 1 \quad \text{cuando } -1 \leq x \leq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

La gráfica de $\operatorname{sen} \phi$ muestra que $\operatorname{sen} \phi > 2\phi/\pi$ cuando $0 < \phi < 1/2\pi$. Por tanto, si $y = (2\phi/\pi)^2 \operatorname{sen}^2 \theta$, resulta que

$$1 - \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi < 1 - y \quad \text{cuando } 0 < \phi < 1/2\pi.$$

Además, $1 - y \leq e^{-y}$, como puede verse gráficamente o del desarrollo en serie de Maclaurin de e^{-y} . De acuerdo con la condición (8), se tiene

$$|P_n(\cos \theta)| < \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2n \operatorname{sen}^2 \theta}{\pi^2} \phi^2\right) d\phi.$$

Haciendo la sustitución $t = \phi \pi^{-1} \sqrt{2n \operatorname{sen} \theta}$ resulta

$$|P_n(\cos \theta)| < \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/2} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}.$$

Esto da la siguiente propiedad de orden de P_n , con respecto a n .

Para cada valor fijo de x ($-1 < x < 1$), $P_n(x)$ es del orden de $n^{-1/2}$ cuando n aumenta:

$$(10) \quad \sqrt{n}|P_n(x)| < \left[\frac{\pi}{2(1-x^2)} \right]^{1/2} \\ (-1 < x < 1, n = 1, 2, \dots).$$

86. Más propiedades de orden. Siendo $P_n(x)$ un polinomio de grado n que contiene solamente potencias alternas de x , es

$$x^n = aP_n(x) + bx^{n-2} + cx^{n-4} + \dots,$$

donde los coeficientes son constantes. Análogamente, x^{n-2} es una combinación lineal de $P_{n-2}(x)$ y un polinomio de grado $n-4$, y así sucesivamente. Resulta, pues, que x^n es una combinación lineal de los polinomios $P_k(x)$, donde $k = n, n-2, \dots, 1$ ó 0 .

La derivada $P'_n(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, que contiene potencias alternas de x , cada una de las cuales puede escribirse como combinación lineal de polinomios de Legendre. En consecuencia, P'_n puede escribirse como combinación lineal en la forma siguiente:

$$(1) \quad P'_n(x) = A_{n-1}P_{n-1}(x) + A_{n-3}P_{n-3}(x) + \dots$$

Para determinar A_j efectuamos los productos interiores de ambos miembros por P_j ,

$$\int_{-1}^1 P_j(x)P'_n(x) dx = A_j(P_j, P'_n) \quad (j = n-1, n-3, \dots).$$

Integrando por partes, la integral del primer término se convierte en

$$P_j(x)P_n(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n(x)P'_j(x) dx,$$

y esta última integral es cero porque P'_j es una combinación lineal de polinomios de Legendre de grado inferior a n . Como, además, $P_k(1) = 1$, $P_k(-1) = (-1)^k$, y $(P_j, P'_j) = 2(2j+1)^{-1}$, resulta

$$A_j = 2j + 1 \quad (j = n-1, n-3, \dots).$$

La representación (1), válida para cualquier x , se convierte entonces en

$$(2) \quad P'_n(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + \dots \\ (n = 1, 2, \dots),$$

terminando con $3P_1(x)$ si n es par y con $P_0(x)$ si n es impar.

Supongamos ahora que $-1 \leq x \leq 1$. Entonces, $|P_n(x)| \leq 1$ (Sec. 85), y se deduce de la fórmula (2) que

$$\begin{aligned} |P'_{2n}(x)| &\leq (4n-1) + (4n-5) + \cdots + 3 = n(2n+1), \\ |P'_{2n+1}(x)| &\leq (4n+1) + (4n-3) + \cdots + 1 \\ &= (n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Como $n(2n+1) \leq (2n)^2$ y $(n+1)(2n+1) \leq (2n+1)^2$ es

$$(3) \quad |P'_n(x)| \leq n^2 \quad \text{cuando } -1 \leq x \leq 1 \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Derivando los dos miembros de la Ec. (2) y observando que $|P'_{n-1}(x)| < n^2$, $|P'_{n-3}(x)| < n^2$, etc., cuando $|x| \leq 1$, se ve por el método empleado anteriormente que

$$(4) \quad |P''_n(x)| \leq n^4 \quad \text{cuando } -1 \leq x \leq 1 \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Análogamente, $|P_n^{(k)}(x)| \leq n^{2k}$ cuando $k = 3, 4, \dots$, $|x| \leq 1$.

Reunimos las propiedades de orden de P_n como sigue.

Teorema 1. Para todo entero positivo n , en todos los puntos del intervalo $-1 \leq x \leq 1$, los valores de cada una de las funciones

$$|P_n(x)|, \frac{1}{n^2} |P'_n(x)|, \frac{1}{n^4} |P''_n(x)|, \dots$$

nunca exceden de la unidad. Para un valor fijo x_0 ($-1 < x_0 < 1$)

$$|P_n(x_0)| < \frac{M_0}{\sqrt{n}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

donde (Sec. 85) el valor de M_0 depende solamente de x_0 .

87. Series de Legendre. De la ortogonalidad de P_n y de la fórmula (8), Sec. 84, para las normas de estos polinomios se sigue que la sucesión de funciones

$$(1) \quad \phi_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

es ortonormal en el intervalo $(-1, 1)$. Las constantes de Fourier con respecto a esa sucesión, de una función f definida en el intervalo, son

$$c_n = (f, \phi_n) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \int_{-1}^1 f(\xi) P_n(\xi) d\xi.$$

La serie generalizada de Fourier correspondiente a f es

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2) P_n(x) \int_{-1}^1 f(\xi) P_n(\xi) d\xi.$$

Esta correspondencia puede escribirse

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \sim f(x) \quad (-1 < x < 1),$$

donde

$$(3) \quad A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

La serie (2) con los coeficientes (3) es la *serie de Legendre* correspondiente a la función f . En la sección siguiente demostraremos que converge a $f(x)$ bajo las condiciones que se enuncian en este teorema.

Teorema 2. *Sea f una función casi-continua en el intervalo $(-1, 1)$. Entonces, en cada punto interior x del intervalo en el que f es continua y posee derivadas a la derecha y a la izquierda, la serie de Legendre correspondiente a f converge a $f(x)$, esto es,*

$$(4) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \quad (-1 < x < 1),$$

donde los coeficientes A_n están dados por la fórmula (3).

La demostración puede ser extendida para demostrar que la serie converge a la media de los valores $f(x+0)$ y $f(x-0)$ cuando f tiene un salto en el punto interior x , si existen allí ambas derivadas unidireccionales¹.

En el caso de que f sea una *función par*, el producto $f(x)P_n(x)$ es también par cuando n es par, e impar cuando n es impar. En consecuencia, $A_{2n+1} = 0$, y

$$(5) \quad A_{2n} = (4n+1) \int_0^1 f(x) P_{2n}(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Por tanto, cuando f es casi-continua en el intervalo $(0, 1)$ y sus derivadas unidireccionales existen en un punto x ($0 < x < 1$) en el que f

¹ Ver D. Jackson, «Fourier Series and Orthogonal Polynomials» págs. 65 y siguientes.

es continua y cuando A_{2n} tiene los valores (5), entonces

$$(6) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} P_{2n}(x) \quad (0 < x < 1)$$

porque el Teorema 2 es aplicable a la extensión par de f .

Análogamente, cuando f satisface esas mismas condiciones en el intervalo $(0,1)$ y en el punto x se tiene que

$$(7) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} P_{2n+1}(x) \quad (0 < x < 1)$$

donde

$$(8) \quad A_{2n+1} = (4n+3) \int_0^1 f(x) P_{2n+1} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Las dos sucesiones de polinomios $\{P_{2n}\}$ y $\{P_{2n+1}\}$, ortogonales en el intervalo $(0,1)$ son, por tanto, cerradas en el sentido de convergencia puntual.

88. Convergencia de las series. Para demostrar el Teorema 2, consideremos un punto x_0 interior al intervalo $(-1,1)$, en el que la función f es continua y posee derivadas unidireccionales. En x_0 el valor de la suma de los m primeros términos de la serie de Legendre puede escribirse

$$(1) \quad S_m(x_0) = \sum_{n=0}^m A_n P_n(x_0) = \int_{-1}^1 f(x) K_m(x, x_0) dx$$

donde $-1 < x_0 < 1$ y

$$(2) \quad K_m(x, x_0) = \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(x_0).$$

Según la fórmula de recurrencia (5), Sec. 84,

$$(3) \quad (2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Esta ecuación lleva a una expresión más breve de K_m . Después de multiplicar los dos miembros de la Ec. (3) por $P_n(x_0)$ y los dos miembros de la ecuación

$$(2n+1)x_0 P_n(x_0) = (n+1)P_{n+1}(x_0) + nP_{n-1}(x_0)$$

por $P_n(x)$ resulta, restando miembro a miembro y utilizando la notación

$$(4) \quad R_n(x, x_0) = P_n(x)P_{n-1}(x_0) - P_{n-1}(x)P_n(x_0),$$

que

$$(2n + 1)(x - x_0)P_n(x)P_n(x_0) = (n + 1)R_{n+1}(x, x_0) - nR_n(x, x_0).$$

Cuando se utiliza la expresión aquí encontrada para $(2n + 1)P_n(x)P_n(x_0)$ en la suma (2), se obtiene después de simplificar

$$(5) \quad K_m(x, x_0) = \frac{m + 1}{2} \frac{P_{m+1}(x)P_m(x_0) - P_m(x)P_{m+1}(x_0)}{x - x_0}$$

si $x \neq x_0$. Pero el numerador de la última fracción, que es $R_{m+1}(x, x_0)$, es un polinomio en x que se anula cuando $x = x_0$, y, por tanto, contiene como factor a $x - x_0$, y en consecuencia la fracción tiene un límite cuando $x \rightarrow x_0$. Obsérvese que la Ec. (5) está de acuerdo con la definición (2) cuando $m = 0$.

Según las Ecs. (1), (4) y (5),

$$(6) \quad S_m(x_0) = \frac{m + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \frac{R_{m+1}(x, x_0)}{x - x_0} dx.$$

Consideremos por el momento el caso especial $f(x) = 1 = P_0(x)$. Entonces, $A_0 = 1$ y $A_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) y, en vista de la Ec. (1), $S_m(x_0) = 1$. Resulta entonces de la Ec. (6),

$$(7) \quad 1 = \frac{m + 1}{2} \int_{-1}^1 \frac{R_{m+1}(x, x_0)}{x - x_0} dx \quad (-1 < x_0 < 1).$$

Multipliquemos ahora los dos miembros de la Ec. (7) por $f(x_0)$ y restemos miembro a miembro el resultado de la Ec. (6). Se obtiene

$$S_m(x_0) - f(x_0) = \frac{m + 1}{2} \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} R_{m+1}(x, x_0) dx;$$

esto es,

$$(8) \quad S_m(x_0) - f(x_0) = \frac{m + 1}{2} \int_{-1}^1 F_0(x) [P_{m+1}(x)P_m(x_0) - P_m(x)P_{m+1}(x_0)] dx,$$

donde

$$F_0(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como $F_0(x_0 + 0)$ y $F_0(x_0 - 0)$ son las derivadas unidireccionales

de la función dada f en el punto x_0 , F_0 es casi-continua en el intervalo $(-1, 1)$. Sean C_m los coeficientes de Fourier de F_0 correspondientes a la sucesión ortonormal de funciones $\phi_m = (m + 1/2)^{1/2} P_m$. Entonces la Ec. (8) puede escribirse

$$(9) \quad S_m(x_0) - f(x_0) \\ = \frac{m+1}{2(m+3/2)^{1/2}} P_m(x_0) C_{m+1} - \frac{m+1}{2(m+1/2)^{1/2}} P_{m+1}(x_0) C_m.$$

Pero $|P_m(x_0)| < M_0 m^{-1/2}$, donde M_0 es independiente de m (Teorema 1). Por tanto, se sigue de la Ec. (9) que

$$|S_m(x_0) - f(x_0)| < M_0 \frac{m+1}{2m} (|C_{m+1}| + |C_m|)$$

y, como $C_m \rightarrow 0$ como $m \rightarrow \infty$ (Sec. 28), se verifica que

$$(10) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x_0) = f(x_0) \quad (-1 < x_0 < 1).$$

Esto completa la demostración del Teorema 2.

PROBLEMAS

1. Si $f(x) = 0$ cuando $-1 < x < 0$ y $f(x) = 1$ cuando $0 < x < 1$, emplear el Teorema 2 y los resultados encontrados en los Probs. 1 y 5, Sec. 84, para demostrar que

$$f(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)] P_{2n+1}(x) \\ = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n+3}{4n+4} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} P_{2n+1}(x)$$

cuando $-1 < x < 1$ y $x \neq 0$. Obsérvese que si como definición se da a $f(0)$ el valor $1/2$ el desarrollo es también válido cuando $x = 0$.

2. Si $f(x) = 0$ cuando $-1 < x \leq 0$ y $f(x) = x$ cuando $0 \leq x < 1$, (a) explicar por qué f está representada por su serie de Legendre en cada punto del intervalo $-1 < x < 1$; (b) demostrar que $A_{2n+1} = 0$, cuando $n = 1, 2, \dots$; (c) determinar los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo

$$\text{Solución } f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} P_1(x) + \frac{5}{16} P_3(x) - \frac{3}{32} P_5(x) + \dots \\ (-1 < x < 1).$$

3. Demostrar que, para todos los valores de x ,

$$(a) x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x); \quad (b) x^3 = \frac{3}{8} P_1(x) + \frac{3}{8} P_3(x).$$

4. Desarrollar la función $f(x) = 1$ ($0 < x < 1$) en serie de polinomios de Legendre de grado impar, en el intervalo $(0, 1)$ ¿Qué función representa la serie en el intervalo $-1 < x < 0$?

$$\text{Solución } 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4n+3}{2n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} P_{2n+1}(x) \quad (0 < x < 1).$$

5. Obtener algunos pocos de los primeros términos de la representación de la función $f(x) = x$ en el intervalo $0 \leq x < 1$ en serie de polinomios de Legendre de grado par para demostrar que

$$x = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{3}{16}P_4(x) + \dots \quad (0 \leq x < 1).$$

Nótese por qué la representación debe ser válida cuando $x = 0$ y qué función representa la serie en el intervalo $-1 < x < 1$.

6. Explicar por qué se verifica que (a) cuando $-1 < x_0 < 1$, es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

(b) cuando f es casi-continua en el intervalo $(0, 1)$, es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4n+1)^{1/2} \int_0^1 f(x) P_{2n}(x) dx = 0.$$

7. Dar detalles de la deducción de la Ec. (2), Sec. 85.

8. Dar detalles de la deducción de la fórmula (5), Sec. 88.

89. Problemas de Dirichlet en regiones esféricas. Como primera aplicación de las series de Legendre determinaremos la función armónica V en el dominio $r < c$ tal que V tome unos valores prescritos $F(\theta)$ en la superficie esférica $r = c$ (Fig. 24). Aquí r , ϕ y θ son coordenadas esféricas, y V es independiente de ϕ . Por consiguiente, V satisface la ecuación de Laplace

$$(1) \quad r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

en el dominio $r < c$, $0 < \theta < \pi$ y la condición

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow c} V = F(\theta) \quad (0 < \theta < \pi, r < c);$$

además, V y sus derivadas parciales de primer y segundo orden han de ser continuas en toda la región interior ($0 \leq r < c$, $0 \leq \theta \leq \pi$) de la esfera.

Físicamente, la función V puede representar temperaturas estacionarias en una esfera sólida $r \leq c$, cuya temperatura superficial

depende solamente de θ ; es decir, la temperatura de la superficie es uniforme en cada circunferencia $\theta = \theta_0$, $r = c$.

Además, V representa potencial electrostático en el espacio $r < c$ libre de cargas, cuando $V = F(\theta)$ en el contorno $r = c$.

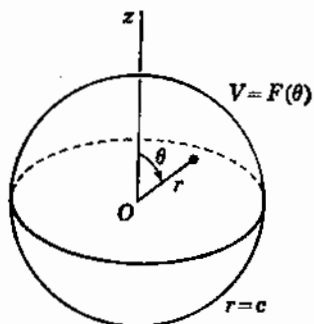


FIG. 24

Introduzcamos aquí una nueva variable x , donde

$$x = \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

En la Ec. (1) la forma diferencial en θ puede escribirse

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(1 - \cos^2 \theta) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - x^2) \frac{\partial V}{\partial x} \right].$$

si ponemos $F(\theta) = f(\cos \theta)$, entonces $V(r, x)$ satisface las condiciones

$$(3) \quad r(rV)_{rr} + [(1 - x^2)V_x]_x = 0 \quad (r < c, -1 < x < 1),$$

$$(4) \quad V(c - 0, x) = f(x) \quad (-1 < x < 1),$$

y V y sus derivadas de primer y segundo orden han de ser funciones continuas de r y x cuando $0 \leq r < c$, $-1 \leq x \leq 1$.

Consideremos una solución de la Ec. (3) de la forma $R(r)X(x)$ que satisfaga las condiciones de continuidad. La separación de variables muestra que, para alguna constante λ , $X(x)$ debe satisfacer la ecuación de Legendre

$$(5) \quad [(1 - x^2)X']' + \lambda X = 0 \quad (-1 < x < 1),$$

donde X , X' y X'' han de ser continuas en el intervalo cerrado $-1 \leq x \leq 1$. Excepto cuando $X(x)$ es idénticamente cero, hemos visto

(Sec. 83) que esas condiciones son satisfechas únicamente en el caso de que λ tenga uno de estos autovalores

$$\lambda = n(n + 1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

entonces $X = P_n(x)$. La separación exige también que, para la misma constante λ , $r(rR)'' = \lambda R$; esto es,

$$(6) \quad r^2 R'' + 2rR' - n(n + 1)R = 0 \quad (r < 1).$$

Además, R ha de ser continua cuando $0 \leq r < 1$.

La Ec. (6) tiene la forma de una ecuación lineal de Cauchy, que se reduce a una con coeficientes constantes con el cambio $r = e^t$. Su solución general es

$$(7) \quad R = C_1 r^n + C_2 r^{-n-1},$$

como puede fácilmente comprobarse. La continuidad de R cuando $0 \leq r < c$, en el origen $r = 0$ en particular, exige que $c_2 = 0$.

Las funciones $r^n P_n(x)$ satisfacen, por tanto, la ecuación de Laplace (3) y las condiciones de continuidad. Formalmente su combinación lineal generalizada

$$(8) \quad V(r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(x) \quad (r \leq c)$$

es una solución de nuestro problema de contorno si los coeficientes A_n son tales que $V(c, x) = f(x)$; esto es,

$$(9) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \quad (-1 < x < 1).$$

Suponemos que f y f' son casi-continuas en el intervalo $(-1, 1)$. Entonces, la Ec. (9) es la serie de Legendre que representa f , válida en cualquier punto $(-1 < x < 1)$, donde f es continua (Teorema 2) cuando

$$(10) \quad A_n = \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi) P_n(\xi) d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

La función armónica V está dada entonces por la fórmula (8) con los coeficientes (10). Como función de r y θ ,

$$(11) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{2} \left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(\cos \theta) \int_{-1}^1 f(\xi) P_n(\xi) d\xi \quad (r \leq c).$$

Más adelante se hará una comprobación completa de esta solución.

La función armónica W en el dominio no acotado $r > c$ exterior a la superficie esférica $r = c$ que toma los valores $f(\cos \theta)$ en esa superficie y que tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$, puede encontrarse de manera análoga. En la Ec. (7), $C_1 = 0$ si R ha de anularse cuando $r \rightarrow \infty$, y nuestras soluciones particulares son $r^{-n-1}P_n(x)$. La fórmula que da W se convierte entonces en

$$(12) \quad W(r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} P_n(x) \quad (r \geq c),$$

donde A_n tiene los valores (10) y $x = \cos \theta$.

Verificación. La fórmula (8) puede ser establecida como solución de nuestro problema en V siguiendo el método empleado en la Sec. 61.

Para demostrar que $V(r, x)$ satisface la condición de contorno (4) para cualquier valor fijo de x donde $f(x)$ es continua, observaremos primero que, según la representación de Legendre (9), la serie (8) converge a $f(x)$ cuando $r = c$. Pero la sucesión de funciones $(r/c)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ está acotada y es monótona con respecto a n , y aplicando el criterio de Abel (Cap. 10) se comprueba que la serie (8) es uniformemente convergente con respecto a r ($\theta \leq r \leq c$). Por consiguiente, V es una función continua de r , y $V(c - 0, x) = V(c, x) = f(x)$.

Los términos de la serie (8) pueden escribirse como producto de los tres factores A_n/n , $P_n(x)$ y $n(r/c)^n$ cuando $n > 0$. Los dos primeros factores están acotados para todos los valores de n y x que aquí se consideran. El tercero es no-negativo y no mayor que $n(r_0/c)^n$ si $0 \leq r \leq r_0$. Cuando $r_0 < c$, la serie de términos $n(r_0/c)^n$ converge. Por consiguiente, la serie (8) converge uniformemente con respecto a r y x cuando $0 \leq r \leq r_0$ y $-1 \leq x \leq 1$. Resulta así que V es continua en todo el interior de la esfera y está acotada cuando $0 \leq r \leq r_0 < c$.

Pero la serie de términos $n^k(r_0/c)^n$ converge también siempre que $0 < r_0 < c$, para cualquier valor positivo fijo de R . Como $n^{-2}P'_n(x)$ y $n^{-4}P''_n(x)$ están acotados ($-1 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$) según el Teorema 1, se deduce fácilmente que la serie (8) es dos veces derivable con respecto a r y x cuando $r < c$ y que las derivadas de V son continuas en el interior de la esfera. Como todos los términos de la serie satisfacen la ecuación de Laplace, la suma de la serie también la satisface.

Esto completa la verificación de la fórmula (8). La solución (12) para la función armónica W en la región exterior puede establecerse

de la misma manera. Poniendo s/c en lugar de c/r en la fórmula que da W se deduce de la discusión anterior de la serie (8) que rW está acotado para valores grandes de r ($s \leq c_0 < c$) y para todos los valores de x ($-1 \leq x \leq 1$).

90. Temperaturas estacionarias en un hemisferio. La base $\theta = 1/2\pi$ de un hemisferio sólido $r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 1/2\pi$ se encuentra aislada. El flujo calorífico a través de la superficie hemisférica se conserva a unos valores prescritos, $f(\cos \theta)$, tal que el flujo resultante por unidad

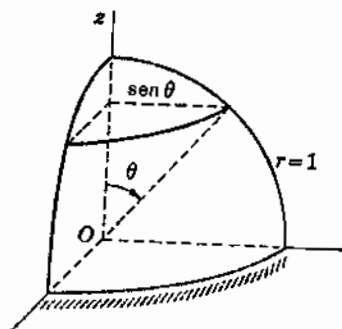


FIG. 25

de tiempo a través de dicha superficie sea cero, con objeto de que las temperaturas puedan ser estacionarias. Esto es, Fig. 25, f satisface la condición

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta = 0$$

o, poniendo $x = \cos \theta$,

$$(1) \quad \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Si u expresa temperaturas como función de r y θ , ó r y x , la condición de que la base esté aislada toma la forma

$$1 \frac{\partial u}{r \partial \theta} = 0, \quad \text{cuando } \theta = 1/2\pi.$$

Pero $u = -u_x \sin \theta$, de modo que la condición a que está sujeta $u(r, x)$ es

$$(2) \quad u_x(r, 0) = 0 \quad (0 < r < 1).$$

El problema de contorno en $u(r, x)$ consiste en la ecuación de Laplace

$$(3) \quad r(ru)_{rr} + [(1-x^2)u_x]_x = 0 \quad (0 < r < 1, 0 < x < 1),$$

la condición (2), y la condición de flujo

$$(4) \quad Ku_r(1, x) = f(x) \quad (0 < x < 1),$$

donde K es la conductividad térmica. Supondremos que f y f' son casi-continuas y que f satisface la condición (1). Además, u ha de satisfacer las condiciones usuales de continuidad cuando $r < 1$ y $0 \leq x \leq 1$.

Separando variables reemplazando u en las Ecs. (2) y (3) por $R(r)X(x)$, se obtienen las condiciones

$$(5) \quad \begin{aligned} [(1-x^2)X']' + \lambda X &= 0 & (0 < x < 1), \\ X'(0) &= 0, \end{aligned}$$

donde X y X' han de ser continuas cuando $0 \leq x \leq 1$, y la condición $r(rR)'' = \lambda R$, donde R ha de ser continua. El problema singular de Sturm-Liouville (5) tiene los autovalores $\lambda = 2n(2n+1)$ y las autofunciones $X = P_{2n}(x)$ (Sec. 83).

Deducimos ahora que $R = r^{2n}$. Se tiene, pues, formalmente que

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{2n} P_{2n}(x)$$

si las B_n son tales que queda satisfecha la condición (4); esto es, si

$$(6) \quad 2K \sum_{n=1}^{\infty} n B_n P_{2n}(x) = f(x) \quad (0 < x < 1).$$

Esta es la representación de f en el intervalo $(0, 1)$ en serie de polinomios de Legendre de grado par (Sec. 87) si $2nKB_n = A_{2n}$, donde

$$(7) \quad A_{2n} = (4n+1) \int_0^1 f(\xi) P_{2n}(\xi) d\xi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

y si f es tal que $A_0 = 0$, que es precisamente la condición (1), queda así B_0 arbitrario y

$$(8) \quad u = B_0 + \frac{1}{2K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(x) \quad (r \leq 1, 0 \leq x \leq 1),$$

donde los coeficientes A_{2n} tienen los valores (7).

La constante B_0 es la temperatura en el origen $r = 0$. Las soluciones de los problemas de Neumann contienen una constante adicional arbitraria, porque todas las condiciones de contorno prescriben valores de las derivadas de la función.

91. Otros sistemas ortogonales. La ecuación de Laplace para una función V de las tres coordenadas esféricas r, ϕ, θ , donde de nuevo ponemos $x = \cos \theta$, es

$$(1) \quad r(rV)_{rr} + [(1-x^2)V_x]_x + (1-x^2)^{-1}V_{\phi\phi} = 0.$$

Si V y sus derivadas han de ser continuas en todo el interior $r < c$ de una esfera, aquellas funciones han de ser periódicas en ϕ con período 2π . Entonces, por medio de una separación de variables se llega a las soluciones particulares

$$(2) \quad r^n(a_m \cos m\phi + b_m \operatorname{sen} m\phi)P_n^m(x) \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Las funciones $X = P_n^m(x)$, llamadas *funciones asociadas de Legendre* satisfacen la ecuación diferencial

$$(3) \quad [(1-x^2)X']' + [n(n+1) - m^2(1-x^2)^{-1}]X = 0.$$

Esas generalizaciones de P_n están relacionadas con los polinomios de Legendre como sigue:

$$(4) \quad P_n^m(x) = (1-x^2)^{1/2m} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Para cada valor fijo de m el sistema $P_n^m(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) es ortogonal en el intervalo $(-1, 1)$ con función peso unidad¹. Obsérvese que $P_n^0(x) = P_n(x)$ y $P_n^m(x) = 0$, si $m > n$.

Otras generalizaciones de los polinomios de Legendre son los *polinomios de Jacobi* $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha > -1$ y $\beta > -1$, definidos por

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

Cuando α y β son fijos, esos polinomios son ortogonales en el inter-

¹ Para el estudio de las funciones asociadas de Legendre ver Cap. 15 de Whittaker y Watson, «Modern Analysis» o Cap. 3 de Hobson, «Spherical and Ellipsoidal Harmonics». Se da una aplicación en Sec. 9.11 del texto de Carslaw and Jaeger, «Conduction of Heat in Solids»

valo $(-1, 1)$, con función peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Cuando $\alpha = \beta = 0$, se reducen a $P_n(x)$, de acuerdo con la fórmula de Rodrigues ¹.

PROBLEMAS

1. Si V es armónico en la totalidad del dominio $r < c$ y $r > c$, si $V \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, y $V = 1$ en la superficie esférica $r = c$, demostrar aprovechando los resultados obtenidos en la Sec. 89 que $V = 1$ cuando $r \leq c$ y $V = c/r$ cuando $r \geq c$.

2. Dar una fórmula para la distribución de temperaturas estacionarias $u(r, \theta)$ en una esfera sólida $r \leq 1$, si para todos los valores de ϕ , $u(1, \theta) = 1$ cuando $0 < \theta < 1/2\pi$ y $u(1, \theta) = 0$ cuando $1/2\pi < \theta < \pi$.

$$\text{Solución } u = 1/2 + 1/2 \sum_{n=0}^{\infty} [P_{2n}(\theta) - P_{2n+2}(\theta)] r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta).$$

3. La base $\theta = 1/2\pi$, $r < 1$ de un hemisferio sólido $r \leq 1$, $0 \leq \theta < 1/2\pi$ se conserva a la temperatura $u = 0$, mientras $u = 1$ en la superficie hemisférica $r = 1$, $0 < \theta < 1/2\pi$. Deducir la fórmula

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4n+3}{2n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta)$$

para la distribución estacionaria de temperatura en el sólido.

4. La base $\theta = 1/2\pi$, $r < c$ de un hemisferio sólido $r \leq c$, $0 \leq \theta \leq 1/2\pi$ se encuentra aislada. La distribución de temperaturas en la superficie hemisférica es $f(\cos \theta)$. Deducir la fórmula

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \left(\frac{r}{c}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \int_0^1 f(\xi) P_{2n}(\xi) d\xi$$

para las temperaturas estacionarias en el sólido. Observar además que $u(r, \theta) = 1$ en el caso de que $f(\cos \theta) = 1$.

5. Una función V es armónica y está acotada en el dominio no acotado $r > c$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta < 1/2\pi$. Si $V = 0$ en todo el contorno plano $\theta = 1/2\pi$, $r > c$ y $V = f(\cos \theta)$ en el contorno hemisférico $r = c$, $0 < \theta < 1/2\pi$ deducir la fórmula

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3) \left(\frac{c}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(\cos \theta) \int_0^1 f(\xi) P_{2n+1}(\xi) d\xi.$$

6. El flujo calorífico $Ku_r(1, \theta)$ hacia el interior de una esfera sólida en su superficie $r = 1$ es una función dada $f(\cos \theta)$, donde f es tal que el flujo total

¹ Figura una introducción a los polinomios de Jacobi, como también a los de Hermite y Laguerre ortogonales en intervalos no acotados, en el reducido texto de D. Jackson «Fourier Series and Orthogonal Polynomials». También se trata en ese texto de las ecuaciones diferenciales satisfechas por los polinomios mencionados. Ver también E. D. Rainville, «Special Functions».

de calor por unidad de tiempo hacia el interior del sólido es cero. Demostrar que entonces $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 0$. Si $u = 0$ en el centro $r = 0$, deducir la siguiente fórmula para las temperaturas estacionarias $u(r, \theta)$ en la esfera $0 \leq r \leq 1$:

$$u = \frac{1}{2K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} r^n P_n(\cos \theta) \int_{-1}^1 f(\xi) P_n(\xi) d\xi.$$

7. La función $u(r, \theta)$ expresa las temperaturas estacionarias en una esfera hueca $a \leq r \leq b$ cuando $u(a, \theta) = f(\cos \theta)$ y $u(b, \theta) = 0$, $0 < \theta < \pi$. Deducir la fórmula

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta),$$

donde

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi) P_n(\xi) d\xi.$$

8. Si $u(x, t)$ representa las temperaturas en una barra aislada no homogénea $-1 \leq x \leq 1$ a lo largo del eje de las x , en la que la conductividad térmica es proporcional a $1 - x^2$ la ecuación del calor toma la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

donde $b > 0$ y es constante si el coeficiente térmico c_0 es constante (Sec 6 y Prob. 8, Sec. 7). Los extremos $x = \pm 1$ están aislados porque allí la conductividad se hace cero. Si $u(x, 0) = f(x)$ ($-1 < x < 1$), deducir la fórmula

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \exp[-n(n+1)bt] P_n(x) \int_{-1}^1 f(\xi) P_n(\xi) d\xi.$$

9. Cuando $f(x) = x^2$ ($-1 < x < 1$) en el Prob. 8, demostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{3} + (x^2 - \frac{1}{3}) \exp(-6bt).$$

10. La distribución inicial de temperaturas en una esfera sólida $r \leq 1$ es una función prescrita $f(\cos \theta)$ independiente de las coordenadas esféricas r y ϕ . Si $k = 1$ y $x = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, la función de temperaturas $u(r, x, t)$ satisface la ecuación del calor en la forma

$$r^2 u_t = r(ru)_{rr} + [(1 - x^2)u_x]_x$$

y las condiciones usuales de continuidad. Supuesto que $u = 0$ cuando $r = 1$ separar variables en el problema para obtener soluciones $R(r)X(x)T(t)$ de las condiciones homogéneas, demostrando que X satisface la ecuación de Legendre, donde $\lambda = n(n+1)$, y que

$$r^2 R'' + 2rR' + [\mu^2 r^2 - n(n+1)]R = 0, \quad R(1) = 0.$$

Verificar que $R = r^{-1/2} J_{n+1/2}(\mu, r)$, donde $\mu = \mu_j$, son las raíces de la ecuación $J_{n+1/2}(\mu) = 0$. De esta forma, sin completar la solución para u , demostrar que

$$R(r)X(x)T(t) = r^{-1/2} J_{n+1/2}(\mu_j, r) P_n(x) \exp(-\mu_j^2 t).$$

CAPITULO 10

UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES

Demostremos algunos teoremas por medio de los cuales se pueden obtener soluciones formales de ciertos tipos de problemas de contorno. Obtenida una solución, ésta podrá ser una de las posibles o la única posible. Cuando el enunciado del problema no exija una adecuada continuidad de la función incógnita o de sus derivadas, podrá aparecer una multiplicidad de soluciones como se vio en el Prob. 10 de la Sec. 67.

El criterio de Abel para la convergencia uniforme (Teorema 1) nos permitirá determinar otras propiedades adicionales de continuidad de soluciones obtenidas en forma de serie, propiedades que serán útiles tanto para establecer soluciones como para demostrar que una solución es única. Los restantes teoremas dan las condiciones para que exista solamente una solución. Se aplican a estos tipos específicos de problemas, y sus aplicaciones quedan aún más limitadas porque exigen un grado de regularidad más bien alto de las funciones de que se trate.

92. Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. Designemos por $s_n(x)$ la suma de los n primeros términos de una serie de funciones $X_i(x)$ que convergen a la suma $s(x)$:

$$(1) \quad s_n(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x), \quad s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x).$$

Supongamos que la serie converge uniformemente con respecto a x para todos los valores de x en algún intervalo. Entonces, como se vio en la Sec. 14, a todo número positivo ϵ se puede hacer corresponder un número n_ϵ , independiente de x , tal que

$$|s(x) - s_n(x)| < 1/2 \epsilon \quad \text{siempre que } n > n_\epsilon,$$

para cualquier valor de x del intervalo. Sea j un entero positivo

cualquiera. Entonces

$$|s_n - s_{n+j}| = |s_n - s + s - s_{n+j}| \leq |s - s_n| + |s - s_{n+j}| < \epsilon.$$

Por tanto, una condición necesaria para la convergencia uniforme de la serie es que, para todos los enteros positivos j ,

$$(2) \quad |s_{n+j}(x) - s_n(x)| < \epsilon \quad \text{siempre que } n > n_1.$$

La condición (2) es una condición suficiente, es el criterio de Cauchy para la convergencia de la serie para cada valor fijo de x , aun en el caso de que n_1 no sea independiente de x . Implica, por tanto, que existe la suma $s(x)$. Se verifica, pues, que para dos valores cualesquiera fijos de n y x , y para el número dado ϵ , existe un número entero $j_1(x)$ tal que

$$(3) \quad |s(x) - s_{n+j}(x)| < \epsilon \quad \text{siempre que } j > j_1(x).$$

Para demostrar que la condición (2) implica convergencia uniforme, designemos por n un entero determinado mayor que n_1 , donde n_1 corresponde al número dado ϵ en el sentido de que la condición (2) es satisfecha para todos los valores de x . Entonces, para cada valor determinado de x la condición (3) queda satisfecha cuando $j > j_1(x)$, y como

$$|s - s_n| = |s - s_{n+j} + s_{n+j} - s_n| \leq |s - s_{n+j}| + |s_{n+j} - s_n|,$$

se sigue de las condiciones (3) y (2) que

$$(4) \quad |s(x) - s_n(x)| < 2\epsilon$$

donde $j > j_1(x)$ y $n > n_1$. Resulta así que $|s(x) - s_n(x)|$, que es independiente de j , es arbitrariamente pequeña para cada valor de x cuando $n > n_1$. Al ser n_1 independiente de x queda establecida la convergencia uniforme.

Obsérvese que aquí x puede designar igualmente un conjunto de variables independientes (x_1, x_2, \dots, x_m) , que representan todos los puntos en algún conjunto E_m de puntos en un espacio m -dimensional. La convergencia uniforme es entonces con respecto a todas las m variables en E_m .

93 Criterio de Abel para la convergencia uniforme. Estableceremos ahora un criterio para la convergencia uniforme de series infinitas cuyos términos sean productos de funciones de ciertas clases. Ya se han utilizado anteriormente (Secs. 61, 79 y 89) las aplicaciones de este criterio con el objeto de verificar las soluciones formales de problemas de contorno.

Las funciones que forman la sucesión $T_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ están *uniformemente acotadas* para todos los puntos t de un intervalo si existe una constante K , independiente de i , tal que

$$(1) \quad |T_i(t)| < K \quad (i = 1, 2, \dots)$$

para todos los valores de t del intervalo. *La sucesión es monótona con respecto a i* si para todo valor de t del intervalo se verifica una de las dos relaciones

$$(2) \quad T_{i+1}(t) \leq T_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

o bien, para cada t ,

$$(3) \quad T_{i+1}(t) \geq T_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

La forma generalizada de un criterio debido a Abel indica que cuando los términos de una serie uniformemente convergente se multiplican por funciones $T_i(t)$ del tipo que acabamos de describir, la nueva serie es uniformemente convergente.

Teorema 1. *La serie*

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)T_i(t)$$

converge uniformemente con respecto al par de variables x y t en una región R del plano xt supuesto que (a) la serie $\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)$ converge uniformemente con respecto a x para todos los valores de x tales que (x, t) está en R , y (b) para todos los valores de t tales que (x, t) está en R , las funciones $T_i(t)$ están uniformemente acotadas y son monótonas con respecto a i ($i = 1, 2, \dots$).

Designemos por S_n la suma parcial de la serie (4):

$$S_n(x, t) = \sum_{i=1}^n X_i(x)T_i(t).$$

Como se vio en la sección anterior, quedará establecida la convergencia uniforme de esta serie si demostramos que a cada número positivo ε corresponde un entero n , independiente de x y t , tal que

$$|S_m(x, t) - S_n(x, t)| < \varepsilon \quad \text{siempre que } m > n,$$

para todos los enteros $m = n + 1, n + 2, \dots$ y para todos los puntos (x, t) de R .

Designemos por s_n la suma parcial

$$s_n(x) = X_1(x) + X_2(x) + \cdots + X_n(x).$$

Entonces, para cada par de números enteros m, n ($m > n$), $S_m - S_n$ puede expresarse

$$\begin{aligned} & X_{n+1}T_{n+1} + X_{n+2}T_{n+2} + \cdots + X_mT_m \\ &= (s_{n+1} - s_n)T_{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1})T_{n+2} + \cdots + (s_m - s_{m-1})T_m \\ &= (s_{n+1} - s_n)T_{n+1} + (s_{n+2} - s_n)T_{n+2} - (s_{n+1} - s_n)T_{n+2} \\ &\quad + \cdots + (s_m - s_n)T_m - (s_{m-1} - s_n)T_m. \end{aligned}$$

Sumando términos alternos se obtiene

$$(5) \quad S_m - S_n = (s_{n+1} - s_n)(T_{n+1} - T_{n+2}) + (s_{n+2} - s_n)(T_{n+2} - T_{n+3}) \\ + \cdots + (s_{m-1} - s_n)(T_{m-1} - T_m) + (s_m - s_n)T_m.$$

Supongamos ahora que las funciones T_i son no-crecientes con respecto a i , satisfaciendo así la condición (2). También satisfacen la condición (1) de estar uniformemente acotadas. De ello resulta que los factores $T_{n+1} - T_{n+2}$, $T_{n+2} - T_{n+3}$, etc., de la Ec. (5) son no-negativos y $|T_i(t)| < K$. Como la serie de términos $X_i(x)$ converge uniformemente, existe un entero n , tal que

$$|s_{n+j}(x) - s_n(x)| < \frac{\epsilon}{3K}, \quad \text{siempre que } n > n,$$

para todos los enteros positivos j , donde ϵ es cualquier número positivo dado y n , es independiente de x (Sec. 92). Entonces, si $n > n$, y $m > n$ se deduce de la Ec. (5) que

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &< \frac{\epsilon}{3K} [(T_{n+1} - T_{n+2}) + (T_{n+2} - T_{n+3}) + \cdots + |T_m|] \\ &= \frac{\epsilon}{3K} (T_{n+1} - T_m + |T_m|) \leq \frac{\epsilon}{3K} (|T_{n+1}| + 2|T_m|). \end{aligned}$$

Por tanto, $|S_m(x, t) - S_n(x, t)| < \epsilon$ siempre que $m > n > n$,

y queda establecida la convergencia uniforme de la serie (4).

La demostración es semejante en el caso de que las funciones T_i sean no-decrecientes con respecto a i .

Cuando x se conserva fijo, la serie de términos es una serie de constantes y el solo requisito que se exige de esta serie es que sea convergente. Entonces, el teorema muestra que, cuando T_i están acotadas

y son monótonas, la serie de términos $X_i T_i(t)$ es uniformemente convergente con respecto a t .

Las extensiones del teorema a casos en los que X_i son funciones de x y t , o donde X_i y T_i son funciones de varias variables, resultan evidentes si se observa que nuestra demostración se basa en la convergencia uniforme de la serie de términos X_i y en la condición de estar acotadas y ser monótonas las funciones T_i .

94 Unicidad de las soluciones de la ecuación del calor. Sea D un dominio consistente en todos los puntos interiores a una superficie cerrada S y \bar{D} el conjunto de puntos, consistente en todos los puntos de D y todos los puntos sobre S . Supondremos siempre que la superficie cerrada S es *lisa por partes*; es decir, es una superficie continua consistente en un número finito de partes para cada una de las cuales el vector normal unidad dirigido hacia el exterior varía de manera continua de un punto a otro. Entonces, si W es una función de x , y y z continua en \bar{D} , en unión de sus derivadas parciales de primero y segundo orden, una forma generalizada del teorema de la divergencia expresa que

$$(1) \quad \int \int_S W \frac{dW}{dn} dA = \int \int \int_D (W \nabla^2 W + W_x^2 + W_y^2 + W_z^2) dV.$$

Aquí dA es el elemento del área en S , dV representa el producto $dx dy dz$, y dW/dn es la derivada en la dirección de la normal a S dirigida hacia el exterior¹.

Consideremos un sólido homogéneo cuyo interior es el dominio D y cuyas temperaturas en el momento t están expresadas por $u(x, y, z, t)$. Un problema bastante general de conducción del calor es el siguiente

$$(2) \quad u_t = k \nabla^2 u + \phi(x, y, z, t) \quad [(x, y, z) \text{ en } D, t > 0],$$

$$(3) \quad u(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad [(x, y, z) \text{ en } \bar{D}],$$

$$(4) \quad u = g(x, y, z, t) \quad [(x, y, z) \text{ sobre } S, t \geq 0].$$

Es éste el problema de determinar temperaturas en un cuerpo con temperaturas iniciales prescritas $f(x, y, z)$ y temperatura en la superficie $g(x, y, z, t)$, y en el interior del cual puede generarse calor continuamente de modo que el generado por unidad de volumen y en la unidad de tiempo sea proporcional a $\phi(x, y, z, t)$.

Supongamos que el problema tiene dos soluciones

$$u = u_1(x, y, z, t), \quad u = u_2(x, y, z, t),$$

¹ La fórmula (1) se encuentra aplicando el teorema básico de la divergencia utilizado en la Sec. 6 al campo vectorial $\text{grad } W$. Ver, por ejemplo, W. Kaplan, «Advanced Calculus» p. 274. 1952.

donde tanto u_1 como u_2 son funciones continuas en la región cerrada \bar{D} cuando $t \geq 0$, mientras que sus derivadas de primer orden con respecto a t y de primero y segundo orden con respecto a x , y y z son continuas en \bar{D} cuando $t > 0$. Como u_1 y u_2 satisfacen las condiciones lineales (2), (3) y (4), su diferencia

$$w(x, y, z, t) = u_1(x, y, z, t) - u_2(x, y, z, t)$$

satisface el problema homogéneo

$$(5) \quad w_t = k\nabla^2 w \quad [(x, y, z) \text{ en } D, t > 0],$$

$$(6) \quad w(x, y, z, 0) = 0 \quad [(x, y, z) \text{ en } \bar{D}],$$

$$(7) \quad w = 0 \quad [(x, y, z) \text{ sobre } S, t \geq 0].$$

Además, w y sus derivadas tienen las propiedades de continuidad de u_1 y u_2 que antes se han supuesto.

Demostremos ahora que $w = 0$ en D cuando $t > 0$ de modo que las dos soluciones u_1 y u_2 resultan idénticas. De ello se seguirá que no puede existir más de una sola solución del problema de contorno en u si se exige a la solución que satisfaga las condiciones de continuidad enunciadas.

La continuidad de W con respecto a las cuatro variables x , y , z y t en la región cerrada \bar{D} cuando $t \geq 0$ implica que la integral

$$(8) \quad I(t) = \frac{1}{2} \int \int \int_D [w(x, y, z, t)]^2 dV$$

es una función continua de t cuando $t \geq 0$. Según la condición (6), $I(0) = 0$. Teniendo en cuenta la continuidad de w_t cuando $t > 0$ y la Ec. (5), se puede escribir

$$I'(t) = \int \int \int_D w w_t dV = k \int \int \int_D w \nabla^2 w dV \quad (t > 0).$$

La fórmula de la divergencia (1) es aplicable a la última integral a causa de la continuidad de las derivadas de w cuando $t > 0$, y, por tanto,

$$(9) \quad \int \int \int_D w \nabla^2 w dV = \int \int_S w \frac{dw}{dn} dA - \int \int \int_D (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) dV$$

cuando $t > 0$. Pero como $w = 0$ sobre s , se tiene

$$I'(t) = -k \int \int \int_D (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) dV \leq 0.$$

El teorema del valor medio se aplica a $I(t)$. Resulta entonces que para cada número positivo t existe un número t_1 tal que $(0 < t_1 < t)$

$$I(t) - I(0) = tI'(t_1),$$

y como $I(0) = 0$ e $I'(t_1) \leq 0$, resulta que $I(t) \leq 0$. Sin embargo, la definición (8) de la integral muestra que $I(t) \geq 0$. En consecuencia

$$I(t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

y, por ello, el integrando no-negativo w^2 no puede tener un valor positivo en ningún punto de D , porque la continuidad de w^2 exige que w^2 sea positivo en un entorno del punto y entonces $I(t) > 0$. Se tiene, pues,

$$w(x, y, z, t) = 0 \quad [(x, y, z) \text{ en } \bar{D}, t \geq 0],$$

y queda establecido el siguiente teorema sobre unicidad.

Teorema 2. Si la función u satisface las siguientes condiciones de regularidad: (a) es función continua con respecto a las cuatro variables x, y, z y t cuando el punto (x, y, z) está en la región cerrada \bar{D} y $t \geq 0$; (b) las derivadas de u presentes en la ecuación del calor (2) son continuas en el mismo sentido cuando $t > 0$. Entonces, si u es una solución del problema de contorno (2) a (4), es la única solución posible que satisface las condiciones (a) y (b).

La condición de que u sea continua en \bar{D} cuando $t = 0$ restringe la utilidad del teorema. Claramente, no queda satisfecho si la función de temperaturas iniciales f de la condición (3) no es continua en la totalidad de \bar{D} , o si en algún punto de S el valor inicial $g(x, y, z, 0)$ de las temperaturas prescritas en la superficie difieren del valor $f(x, y, z)$. La exigencia de la continuidad en $t = 0$ puede suavizarse en algunos casos¹.

Cuando las condiciones (a) y (b) son añadidas a la exigencia de que u ha de satisfacer la ecuación del calor y las condiciones de contorno, nuestro problema de contorno queda enunciado de manera completa, supuesto que tenga una solución, porque ésta resultará la única posible.

¹ Ver, por ejemplo, la Sec. 73 del libro del autor «Operational Mathematics», 1958.

La demostración del Teorema 2 requiere que la integral

$$\int \int_S w \frac{dw}{dn} dA$$

de la fórmula (9) debe anularse o tener un valor negativo. Se anulaba porque $w = 0$ sobre S . Pero no es nunca posible que sea positiva si la condición (4) se reemplaza por la condición de contorno

$$(10) \quad \frac{dw}{dn} + hw = g(x, y, z, t) \quad [(x, y, z) \text{ sobre } S, t > 0]$$

donde $h \geq 0$. Porque en este caso $dw/dn = -hw$ sobre S , y $w dw/dn \leq 0$. Según eso, nuestro teorema puede modificarse como sigue.

Teorema 3. *El enunciado del Teorema 2 es cierto si la condición de contorno (4) se reemplaza por la condición (10), o si (4) se satisface sobre parte de la superficie S y (10) sobre el resto.*

95. Ejemplo. En el problema de distribución de temperaturas en un paralelepípedo con caras aisladas $x = 0$ y $x = \pi$ y temperatura inicial $f(x)$ (Sec. 62b), supongamos f continua y f' casi-continua en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$. Entonces, la serie de Fourier de cosenos de f converge uniformemente a $f(x)$ en ese intervalo.

Designemos por $u(x, t)$ la suma de la serie

$$(1) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 kt) \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi, t \geq 0),$$

obtenida como solución formal del problema y donde a_n son los coeficientes de la serie de Fourier de cosenos de f .

Utilizando el criterio de Abel (Teorema 1), se puede comprobar que la serie (1) converge uniformemente con respecto al par de variables x y t en la región $0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$; y, por tanto, u es allí continua. Cuando $t \geq t_0$, donde t_0 es un número positivo cualquiera, la serie obtenida derivando término a término la serie (1) cualquier número de veces con respecto a x ó a t es uniformemente convergente de acuerdo con el teorema de Weierstrass. De ello se deduce que u no solamente satisface todas las condiciones del problema de contorno (comparar con Sec. 61), sino que, además, u_t, u_x y u_{xx} son funciones continuas en la región $0 \leq x \leq \pi, t > 0$. En consecuencia, u satisface las condiciones de regularidad (a) y (b) del Teorema 2.

El problema de temperaturas en el paralelepípedo es el mismo que el problema en una barra prismática con sus bases en los planos $x = 0$ y $x = \pi$ y con su superficie lateral, paralela al eje de las x , aislada

($du/dn = 0$). Consideremos el dominio D formado por todos los puntos interiores del prisma. Entonces, la aplicación del Teorema 3 demuestra que la suma $u(x, t)$ de la serie (1) es la única solución que satisface las condiciones (a) y (b).

PROBLEMAS

1. En el problema de distribución de temperaturas en el hemisferio $r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, resuelto formalmente en la Sec. 90, supóngase que f y f' son casi continuas. Utilizando el criterio de Abel y las series de Legendre, demostrar que para cada valor fijo de x ($0 < x < 1$, $x = \cos \theta$), donde f es continua, la serie de la solución (8), Sec. 90, es decir, la

$$B_0 + \frac{1}{2K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(x),$$

converge uniformemente con respecto a r ($0 \leq r \leq 1$). Demostrar también que la serie es derivable con respecto a r y que

$$Ku_r(1 - 0, x) = f(x),$$

donde $u(r, x)$ es la suma de la serie.

2. En el Prob. 10, Sec. 62, sobre las temperaturas $u(x, t)$ en un paralelepípedo inicialmente con temperaturas $f(x)$, y en el que en todo su interior se genera calor proporcionalmente al tiempo, supóngase que f es continua y f' casi continua ($0 \leq x \leq \pi$) y que $f(0) = f(\pi) = 0$. Demostrar que la función $u(x, t)$ allí dada es la única solución del problema que satisface las condiciones de regularidad (a) y (b) enunciadas en el Teorema 2.

3. Establecer la solución del Prob. 13, Sec. 62, y demostrar que es la única solución posible que satisface las condiciones de regularidad (a) y (b) enunciadas en el Teorema 2. Observar que en este caso el criterio de Weierstrass es suficiente para todas las pruebas de la convergencia uniforme.

4. Suponiendo que en la Sec. 79 la función inicial de temperaturas $f(\rho)$ en el cilindro es continua ($0 \leq \rho \leq c$) y que su serie de Fourier-Bessel, allí utilizada converge uniformemente a $f(\rho)$ en ese intervalo, demostrar que la solución allí establecida es la única que satisface nuestras condiciones de regularidad.

96. Soluciones de la ecuación de Laplace o de la de Poisson. Sea W una función armónica en un dominio D del espacio tridimensional limitado por una superficie cerrada continua S que es uniforme por partes. Supongamos, además, que W y sus derivadas parciales de primer orden son continuas en el cierre \bar{D} del dominio. Entonces, por ser

$$(1) \quad \nabla^2 W(x, y, z) = 0 \quad [(x, y, z) \text{ en } D],$$

la forma (1), Sec. 94, de la fórmula de la divergencia se convierte en

$$(2) \quad \iint_S W \frac{dW}{dn} dA = \iiint_D (W_x^2 + W_y^2 + W_z^2) dV.$$

Esta fórmula es válida para la función W aunque hayamos exigido que las derivadas de segundo orden sean continuas solamente en D , no en la región cerrada \bar{D} . No es difícil demostrar que, como $\nabla^2 W = 0$, resulta posible una modificación de las condiciones usuales del teorema de la divergencia¹.

Supóngase que $W = 0$ en todos los puntos de S . Entonces la primera integral de la fórmula (2), y, por tanto, la segunda, se anulan. Pero como el integrando de la segunda es no-negativo y continuo en \bar{D} , debe anularse en la totalidad de \bar{D} ; esto es,

$$(3) \quad W_x = W_y = W_z = 0 \quad [(x,y,z) \text{ en } \bar{D}].$$

En consecuencia, $W(x,y,z)$ es constante. Pero como es cero sobre S y continua en \bar{D} , $W = 0$ en la totalidad de \bar{D} .

Supongamos ahora que dW/dn , en lugar de W , se anula sobre S ; o para hacer la condición más general, supongamos que

$$(4) \quad \frac{dW}{dn} + hW = 0 \quad [(x,y,z) \text{ sobre } S],$$

donde $h \geq 0$ y h es una constante o una función de x , y y z . Entonces, sobre S

$$W \frac{dW}{dn} = -hW^2 \leq 0$$

de modo que la primera integral en la fórmula (2) es no-positiva. Pero como la segunda integral es no-negativa, esta integral debe ser nula y, por tanto, obtenemos de nuevo las condiciones (3), de modo que W es constante en \bar{D} .

En el caso de que W se anule sobre parte de S y satisfaga las condiciones (4) sobre el resto de esa superficie, nuestro razonamiento sirve todavía para demostrar que W es constante en \bar{D} . En este caso la constante debe ser cero.

Designemos ahora por U una función continua en \bar{D} en unión con sus derivadas parciales de primer orden y con derivadas de segundo orden continuas en D , que satisfaga además las condiciones:

$$(5) \quad \nabla^2 U(x,y,z) = f(x,y,z) \quad [(x,y,z) \text{ en } D],$$

$$(6) \quad p \frac{dU}{dn} + hU = g \quad [(x,y,z) \text{ sobre } S].$$

¹ Ver O. D. Kellogg «Foundations of Potential Theory» p. 119.

Donde f , p , h y g designan constantes o funciones de (x, y, z) dadas, pero suponiendo que $p \geq 0$ y $h \geq 0$.

Las condiciones de contorno (6) incluyen casos especiales importantes. Cuando $p = 0$ sobre S , o sobre parte de S , el valor de U está allí asignado. Cuando $h = 0$ está asignado el valor de dU/dn . Desde luego, p y h no deben anularse simultáneamente.

Si $U = U_1(x, y, z)$ y $U = U_2(x, y, z)$ son dos soluciones de este problema, su diferencia

$$W = U_1 - U_2$$

satisface la ecuación de Laplace en D y la condición

$$p \frac{dW}{dn} + hW = 0$$

sobre S . Además, W satisface las condiciones de regularidad requeridas de U_1 y de U_2 . Es, por tanto, armónica en D y W , y sus derivadas de primer orden son continuas en \bar{D} . De los resultados establecidos con anterioridad para las funciones armónicas se deduce que W debe ser constante en la totalidad de \bar{D} . Resulta, pues, que $dW/dn = 0$ sobre S . En el caso de que h sea diferente de cero en algún punto de S , entonces W es allí nulo, de modo que $W = 0$ en la totalidad de \bar{D} .

Acabamos de establecer el siguiente teorema de unicidad para problemas de electrostática o potencial gravitatorio, temperaturas estacionarias u otros problemas de contorno para las ecuaciones de Laplace o Poisson.

Teorema 4. *Sea $U(x, y, z)$ una función que satisface las siguientes condiciones de regularidad en un dominio D , limitado por una superficie cerrada S : (a) es continua en unión con sus derivadas de primer orden, en \bar{D} , y (b) sus derivadas de segundo orden son continuas en D . Entonces, si U es una solución del problema de contorno consistente en las condiciones (5) y (6), es la única solución que satisface las condiciones (a) y (b), con la posible excepción de $U + C$, donde C es una constante arbitraria. A no ser que $h = 0$ en todos los puntos de S , es $C = 0$ y la solución única.*

Es posible demostrar que este teorema también se aplica cuando D es el dominio ilimitado exterior a la superficie cerrada S , supuesto que U satisfaga la exigencia adicional de que los valores absolutos de rU , r^2U_{xx} , r^2U_{yy} y r^2U_{zz} estén acotados para todos los valores de r mayores que algún número fijo, donde r es la distancia de (x, y, z) al origen¹. Entonces, como U se anula cuando $r \rightarrow \infty$, la constante C es cero y la solución es única. Debe observarse, sin embargo, que S

¹ Kellog, obra citada.

es una superficie cerrada, de modo que esta extensión del teorema no se aplica, por ejemplo, a dominios ilimitados entre dos planos o al interior de un cilindro.

La condición (a) del Teorema 4 es severa porque requiere de U y de sus derivadas de primer orden que sean continuas sobre la superficie S . Para los problemas en los que $p = 0$ sobre S , de modo que U esté prescrita sobre todo el contorno, la condición puede suavizarse de modo que solo se exija la continuidad de la propia U en \bar{D} , si las derivadas son continuas en D . Esto se sigue directamente de un teorema fundamental en la teoría del potencial: si una función que no sea una constante es armónica en D y continua en \bar{D} , toma sus valores máximo y mínimo en puntos de S , nunca en D ¹.

97. Una aplicación. Para ilustrar la utilización del Teorema 4 consideremos el problema de la Sec. 63 relativo a la determinación de las temperaturas estacionarias $u(x,y)$ en una placa rectangular con tres aristas a la temperatura cero y una distribución asignada de temperaturas en la cuarta arista. Las caras de la placa están aisladas. Para nuestro fin, es suficiente considerar una placa cuadrada con aristas de longitud π . Mientras se cumpla que $du/dn = 0$ en las caras, el espesor de la placa no afecta al problema.

El dominio D es el interior de la región limitada por los planos $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = \pi$, $z = z_1$ y $z = z_2$, donde z_1 y z_2 son constantes. Entonces, S es el contorno de ese dominio. La función requerida u es armónica en D . Se anula en las tres partes $x = 0$, $x = \pi$ e $y = \pi$ de S , y $u = f(x)$ en la parte $y = 0$; además, $u_z = 0$ en las partes $z = z_1$ y $z = z_2$. Se puede, pues, aplicar al Teorema 4 si u y sus derivadas de primer orden son continuas en \bar{D} .

Supongamos en primer lugar que u es independiente de z . Entonces se tiene

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi), \\ (2) \quad & u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad (0 \leq y \leq \pi), \\ (3) \quad & u(x,0) = f(x), \quad u(x,\pi) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi). \end{aligned}$$

La solución formal encontrada en la Sec. 63 se convierte en

$$(4) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \sin nx,$$

donde b_n son los coeficientes de la serie de Fourier de senos de f .

¹ Físicamente, el teorema parece evidente ya que enuncia que las temperaturas estacionarias no pueden tener valores máximos o mínimos en el interior de un sólido en el que no se genera calor. Para una demostración en tres dimensiones, ver Kollog, obra citada; en dos dimensiones, ver Churchill, «Complex Variables and Applications», sec. 54, 1960.

Para demostrar que la función (4) satisface las condiciones de regularidad, exigiremos que f y f' sean continuas y f'' casi-continua ($0 \leq x \leq \pi$) y que

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

Los resultados encontrados en el Cap. 5 demuestran entonces que

$$(5) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx,$$

y ambas series convergen uniformemente en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$. La segunda serie, obtenida por derivación de la primera, es la serie de Fourier de cosenos de f' , y como f' es continua y f'' casi-continua, esta serie resulta no solo uniformemente convergente, sino que, además, converge la serie de valores absolutos $|nb_n|$ de sus coeficientes. Se sigue entonces del criterio de Weierstrass que la serie

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \operatorname{sen} nx \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

también converge uniformemente con respecto a x .

Demostremos ahora que la sucesión de funciones

$$(7) \quad \frac{\operatorname{sen} n(\pi - y)}{\operatorname{sen} n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots, 0 \leq y \leq \pi)$$

que aparece en la serie (4) es monótona y no-decreciente cuando n aumenta, para cada valor fijo de y . Esto es evidente cuando $y = 0$ y cuando $y = \pi$. Es cierto cuando $0 < y < \pi$ si la función

$$T(t) = \frac{\operatorname{senh} \beta t}{\operatorname{senh} \alpha t} \quad (t > 0, \alpha > \beta > 0)$$

decrece siempre al aumentar t . Ahora bien,

$$\begin{aligned} T'(t) \operatorname{senh}^2 \alpha t &= \beta \operatorname{senh} \alpha t \cosh \beta t - \alpha \operatorname{senh} \beta t \cosh \alpha t \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{senh}(\alpha + \beta)t + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{senh}(\alpha - \beta)t \\ &= -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \left[\frac{\operatorname{senh}(\alpha + \beta)t}{\alpha + \beta} - \frac{\operatorname{senh}(\alpha - \beta)t}{\alpha - \beta} \right] \\ &= -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta)^{2n} - (\alpha - \beta)^{2n}}{(2n + 1)!} t^{2n+1}. \end{aligned}$$

Los términos de esta serie son positivos, de modo que $T'(t) < 0$ y, por tanto, $T(t)$ decrece al aumentar t .

Análogamente, las funciones con valores positivos

$$(8) \quad \frac{\cosh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \quad (0 \leq y \leq \pi),$$

que aparecen en la serie para u_y , no aumenta nunca en valor cuando n crece porque sus cuadrados pueden expresarse

$$(9) \quad \frac{1}{\sinh^2 n\pi} + \left[\frac{\sinh n(\pi - y)^2}{\sinh n\pi} \right],$$

y todos los términos son no-crecientes.

Los valores de las funciones (7) claramente varían solamente entre cero y la unidad para todos los valores de n e y de que se trata. Las funciones (8) están también uniformemente acotadas y pueden, pues, emplearse en el criterio de Abel para la convergencia uniforme. De la convergencia uniforme de las series de las ecuaciones (5), y la serie (6), en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, se concluye no solo que la serie (4) converge uniformemente con respecto al par x e y en la región $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, sino también que la convergencia uniforme se mantiene para las series obtenidas derivando término a término la serie (4), una vez, con respecto a x o a y .

En consecuencia, la serie (4) es derivable respecto a x e y y su suma $u(x, y)$ y u_x e u_y son continuas en la región cerrada $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$. Claramente, u satisface las condiciones de contorno (2) y (3).

Las derivadas de segundo orden con respecto a x ó y de los términos de la serie (4) tienen valores absolutos que no exceden de

$$(10) \quad n^2 |b_n| \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n\pi}$$

cuando $0 \leq x \leq \pi$ e $y_0 \leq y \leq \pi$, donde $y_0 > 0$. Escojamos M de modo que $|b_n| < M$ para todos los valores de n . Entonces, de las desigualdades

$$2 \sinh n(\pi - y_0) < \exp n(\pi - y_0), \quad 2 \sinh n\pi \geq e^{n\pi}(1 - e^{-2n}),$$

se sigue que los números (10) son menores que

$$\frac{M}{1 - \exp(-2\pi)} n^2 \exp(-ny_0).$$

La serie compuesta de estos términos converge, de acuerdo con el criterio del cociente, pues $y_0 > 0$, y, entonces, el criterio de Weierstrass asegura la convergencia uniforme de la serie de las derivadas segundas de los términos de la serie (4) cuando $y_0 \leq y \leq \pi$. Resulta pues, que la serie (4) es dos veces derivable y también que u_{xx} y u_{yy} son continuas en la región $0 \leq x \leq \pi$, $0 < y \leq \pi$.

Como los términos de la serie (4) satisfacen la ecuación de Laplace, la suma $u(x,y)$ de esa serie satisface la condición (1). Queda así u establecida como una solución de nuestro problema de contorno. Además, u satisface nuestras condiciones de regularidad, incluso con respecto a z , ya que es independiente de z y $u_z = 0$ para todos los valores de las variables; en particular, en las partes de $z = z_1$ y $z = z_2$ de S . Según el Teorema 4, la función definida por la serie (4) es la única solución posible que satisface las condiciones de regularidad.

98. Soluciones de una ecuación de las ondas. Consideremos la siguiente generalización del problema resuelto en la Sec. 56 para los desplazamientos transversales en una cuerda tensa

$$(1) \quad y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t) + \phi(x,t) \quad (0 < x < c, t > 0),$$

$$(2) \quad y(0,t) = p(t), \quad y(c,t) = q(t) \quad (t \geq 0),$$

$$(3) \quad y(x,0) = f(x) \quad y_t(x,0) = g(x) \quad (0 \leq x \leq c).$$

Pero ahora exigiremos que y sea de la clase C^2 en la región R : $0 \leq x \leq c$, $t \geq 0$, con lo que queremos decir que y y sus derivadas de primero y segundo orden, incluyendo y_{xt} e y_{tx} han de ser funciones continuas en R . Como se ha indicado en ejemplos del Cap. 7, a las funciones prescritas ϕ , p , q , f y g han de imponérseles ciertas restricciones si se quiere que el problema tenga una solución de la clase C^2 .

Supongamos que existan dos soluciones $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ de esa clase. Entonces la diferencia $z = y_1 - y_2$ es de la clase C^2 en R , y satisface el problema homogéneo

$$(4) \quad z_{tt}(x,t) = a^2 z_{xx}(x,t) \quad (0 < x < c, t > 0),$$

$$(5) \quad z(0,t) = 0, \quad z(c,t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

$$(6) \quad z(x,0) = 0, \quad z_t(x,0) = 0 \quad (0 \leq x \leq c).$$

Demostremos que $z = 0$ en la totalidad R , y que, por tanto, $y = y_2$.

El integrando de la integral

$$(7) \quad I(t) = \frac{1}{2} \int_0^c (z_x^2 + a^{-2} z_t^2) dx \quad (t \geq 0)$$

satisface condiciones que permiten escribir

$$(8) \quad I'(t) = \int_0^c (z_x z_{xt} + a^{-2} z_t z_{tt}) dx.$$

Como $z_{tt} = a^2 z_{xx}$, el integrando anterior puede escribirse

$$z_x z_{tx} + z_t z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (z_x z_t);$$

y en consecuencia, teniendo presente las condiciones (5),

$$(9) \quad I'(t) = z_x(c,t)z_t(c,t) - z_x(0,t)z_t(0,t) = 0.$$

Es decir, $I(t)$ es una constante. Pero la definición (7) muestra que $I(0) = 0$ porque $z(x,0) = 0$ y, por tanto, $z_x(x,0) = 0$, y, además, es $z_t(x,0) = 0$, y, finalmente, $I(t) = 0$. El integrando continuo no-negativo de aquella integral debe, por tanto, anularse, esto es,

$$z_x(x,t) = z_t(x,t) = 0 \quad (0 \leq x \leq c, t \geq 0)$$

de modo que z es constante; de hecho $z(x,t) = 0$ porque $z(x,0) = 0$.

Resulta, pues, que el problema de contorno consistente en las condiciones (1), (2) y (3) no puede tener más de una solución de la clase C^2 en R .

En el caso en que se prescribe y_x en lugar de y en el extremo, en una de las condiciones (2), o en ambas a la vez, la prueba de la unicidad es todavía válida porque la condición (9) sigue siendo satisfecha.

La exigencia de continuidad de las derivadas de y es severa. Las soluciones de muchos problemas sencillos en la ecuación de las ondas tienen discontinuidades en sus derivadas¹.

PROBLEMAS

1. Supóngase que en el problema de Dirichlet para un rectángulo tratado en la Sec. 63, f y f' son casi-continuas en el intervalo $(0,a)$. Demostrar que la solución formal allí encontrada satisface la condición $u(x,0) = f(x)$ cuando

¹ Resulta posible, aunque algo tedioso, suavizar las exigencias de continuidad de las derivadas de segundo orden. La ecuación (8) donde supusimos esta continuidad, es válida cuando se permite a esas derivadas tener saltos finitos en ciertas líneas de la Región R . En un caso especial, se considera la unicidad bajo tales condiciones en la Sec. 84 del libro del autor «Operational Mathematics», 1958.

$0 < x < a$, si $f(x)$ está definida como la media de $f(x + 0)$ y $f(x - 0)$ en sus puntos de discontinuidad.

2. Formular un enunciado completo del problema de contorno para las temperaturas estacionarias en una placa cuadrada con caras aisladas, cuando las aristas $x = 0$, $x = \pi$, e $y = 0$ están aisladas, y la arista $y = \pi$ se mantiene a temperaturas $u = f(x)$. Si f , f' y f'' son continuas en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$ y $f'(0) = f'(\pi) = 0$, demostrar que el problema tiene como solución única

$$u = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cosh ny}{\cosh n\pi} \cos nx \quad \left[a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right].$$

3. Reemplazar el cilindro infinito de la Sec. 67a, por un cilindro limitado por las superficies $\rho = 1$, $z = z_1$ y $z = z_2$, donde $u_z = 0$ en las dos últimas partes de la superficie. Supóngase además que $f(\phi)$ es una función periódica de período 2π , con una derivada de segundo orden continua para todos los valores de las variables. Demostrar que entonces la función u dada por la fórmula (5). Sec. 67, es la única solución que satisface nuestras condiciones de regularidad, del problema de temperaturas estacionarias.

4. Emplear la unicidad establecida en la Sec. 98 para demostrar que la solución $y = A \sin \pi x \cos \pi at$ del Prob. 1, Sec. 57, es la única solución de clase C^2 en la región $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$.

5. Demostrar que la solución del Prob. 3, Sec. 60, es única en la clase C^2 .

6. Supóngase que en la Sec. 58 $f(x)$ es tal que su extensión periódica impar $F(s)$ posee una derivada F'' continua para todos los valores de s ($-\infty < s < \infty$). Demostrar que entonces la solución (9) es la única en la clase C^2 .

BIBLIOGRAFIA

Para ampliación de los temas tratados, sigue a continuación una lista de libros y artículos que no pretende ser exhaustiva. En los libros que se relacionan se hacen referencias adicionales.

- Bócher, M.: Introduction to the Theory of Fourier's Series, *Annals of Math.*, ser. 2, vol 7, págs. 81-152, 1906.
- Bowman, F.: «Introduction to Bessel Functions», Dover Publications, Nueva York, 1958.
- Carslaw, H. S.: «Theory of Fourier's Series and Integrals», 3.ª ed., Macmillan & Co., Ltd., Londres, y Dover Publications, Nueva York, 1930.
- , y J. C. Jaeger: «Conduction of Heat in Solids», 2.ª ed., Oxford University Press, Londres, 1959.
- Churchill, R. V.: «Complex Variables and Applications», 2.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1960.
- : «Operational Mathematics», 2.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1958.
- Coddington, E. A., y N. Levinson: «Theory of Ordinary Differential Equations», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1955.
- Collatz, L.: «Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung», Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1948.
- Courant, R., y D. Hilbert: «Methods of Mathematical Physics», Interscience Publishers, Inc., Nueva York, vol. 1, 1953; vol. 2, «Partial Differential Equations», 1962.
- Epstein, B.: «Partial Differential Equations: An Introduction», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1962.
- Erdélyi, A., W. Magnus, y F. Tricomi: «Higher Transcendental Functions», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, vols. 1, 2, 1953; vol. 3, 1955.
- Frank, P., y R. v. Mises: «Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik», vols. 1 y 2, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1930, 1955.
- Friedman, B.: «Principles and Techniques of Applied Mathematics», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1956.
- Gray, A., G. B. Mathews, y T. M. MacRobert: «A treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics», 2.ª ed., Macmillan & Co., Ltd., Londres, 1952.
- Greenspan, D.: «Introduction to Partial Differential Equations», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1961.
- Hobson, E. W.: «The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics», Cambridge University Press, Londres, 1931.
- Ince, E. L.: «Ordinary Differential Equations», Longmans, Green & Co., Ltd., Londres, 1927.
- Jakson, D.: «Fourier Series and Orthogonal Polynomials», Carns Mathematical Monographs, N.º 6, Mathematical Association of America, 1941.

- Jahnke, E., F. Emde, y F. Losch: «Tables of Higher Functions», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1960.
- Kellogg, O. D.: «Foundations of Potential Theory», Springer-Verlag OHG, Berlín, 1929.
- Langer, R. E.: «Fourier's Series: The Genesis and Evolution of a Theory, Slaughter Memorial Papers, N.º 1, *Amer. Math. Monthly*, vol. 54, n.º 7, 2.ª parte, págs. 1-86, 1947.
- Lord Rayleigh: «Theory of Sounds», 2.ª ed., vols. 1 y 2, Dover Publications, Nueva York, 1945.
- Rainville, E. D.: «Special Functions», The Macmillan Company, Nueva York, 1960.
- Rogosinski, W.: «Fourier Series», Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1950.
- Sneddon, I. N.: «Fourier Transforms», McGraw-Hill Book Company, Inc. Nueva York, 1951.
- Tamarkin, J. D., y W. Feller: «Partial Differential Equations», mimeographed lecture notes, Brown University, 1941.
- Titchmarsh, E. C.: «Eigenfunction Expansions Associated with Secondorder. Differential Equations», Oxford University Press, Londres, 1946, vol. 2, 1958.
- : «Theory of Fourier Integrals», Oxford University Press, Londres, 1937.
- Tolstov, G. P.: «Fourier Series», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. N. J. 1962.
- Van Vleck, E. B.: «The Influence of Fourier's Series upon the Development of Mathematics», *Science*, vol. 39, págs. 113-124, 1914.
- Watson, G. N.: «A Treatise on the Theory of Bessel Functions», 2d ed., Cambridge University Press, Londres, 1944.
- Whittaker, E. T., y G. N. Watson: «Modern Analysis», Cambridge University, Press, Londres, 1950.
- Zygmund, A.: «Trigonometric Series», 2.ª ed., vols. 1 y 2, Cambridge University Press, Nueva York, 1959.